(Organizadores)
Darly Fernando Andrade
Maria Célia da Silva Gonçalves

EXPLORANDO A MATEMÁTICA

Teoria e Prática na Educação

VOLUME 1

Editora Poisson

Darly Fernando Andrade
Maria Célia da Silva Gonçalves
(Organizadores)

Explorando a matemática
Teoria e Prática na Educação
Volume 1

1ª Edição

Belo Horizonte
Poisson
2024

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

E24

Explorando a matemática: Teoria e Prática na Educação – Volume 1/ Organização: Darly Fernando Andrade, Maria Célia da Silva Gonçalves – Belo Horizonte– MG: Editora Poisson, 2024

Formato: PDF
ISBN: 978-65-5866-442-0
DOI: 10.36229/978-65-5866-442-0
Modo de acesso: World Wide Web
Inclui bibliografia

1.Matemática 2.Educação I. ANDRADE, Darly Fernando II. GONÇALVES, Maria Célia da Silva III.Título

CDD-370

Sônia Márcia Soares de Moura – CRB 6/1896

Esse e outros títulos podem ser baixados gratuitamente em www.poisson.com.br
Entre em contato pelo contato@poisson.com.br

SUMÁRIO

SUMÁRIO

Capítulo 1

O uso do cálculo mental e jogos para o ensino de matemática nos Anos Iniciais

Míriam do Rocio Guadagnini
Elisabeth Cristina de Faria
José Charles Conrado Ribeiro
Thiago de Lima Fernandes
Luciene de Souza Barbosa Bulad

Resumo: Neste resumo apresentamos os elementos de um projeto de pesquisa vivenciada com alunos do terceiro ano do Ensino Fundamental - Anos Iniciais, de uma escola da rede pública federal de ensino, campo do subprojeto Matemática do Programa de Residência Pedagógica. A partir do seguinte questionamento: "O cálculo mental pode motivar os alunos a participarem ativamente das aulas de Matemática?". O objetivo foi desenvolver habilidades de cálculo mental visando ressignificar as operações matemáticas e privilegiar a participação ativa dos estudantes, o estudo centrou nas noções de contagem, adição, subtração e multiplicação e suas diferentes representações, consideradas como conhecimentos prévios possíveis de serem mobilizados pelos alunos que participaram da pesquisa. O referencial teórico de apoio é centrado no cálculo mental de Douady e nos jogos e cálculo mental de Grando. Para a busca do jogo adequado foi utilizado a metodologia de pesquisa documental de Lüdcke e André. O trabalho com cálculo mental possibilitou que os alunos atribuíssem sentido ao algoritmo, na medida em que permitiu que construíssem estratégias de antecipação e conferência de resultados, ainda observamos que a metodologia de cálculo mental associada ao jogo on-line possibilitou o desenvolvimento do raciocínio, agilidade, troca com os pares e interesse pelos alunos, o que trouxe vários benefícios ao longo do estudo como maior concentração, melhora na quantidade de respostas corretas em relação a um questionamento, domínio do cálculo escrito e permitiu compreender e organizar as propriedades das operações numéricas.

Palavras-chave: cálculo mental, jogos *on-line,* operações matemáticas elementares, residência pedagógica, Ensino Fundamental - Anos Iniciais.

1. INTRODUÇÃO

Apresentamos um relato de experiência desenvolvida em duas turmas de terceiros anos (60 alunos, entre 8 a 9 anos) do Ensino Fundamental – Anos Iniciais, do Centro de Ensino e Pesquisa Aplicada à Educação (CEPAE) da Universidade Federal de Goiás no ano de 2022, uma parceria entre residentes pedagógicos em matemática, professora preceptora e orientação de área. O desenvolvimento da atividade teve a duração de dez aulas de quarenta e cinco minutos cada, num total de 5 semanas de aplicação da metodologia.

Considerando o pós-pandemia e a importância de organizar atividades que chamassem a atenção dos alunos e os motivassem a participar ativamente das aulas, discutindo e refletindo sobre as noções matemáticas em jogo nas atividades propostas, nos colocamos a seguinte questão: "O cálculo mental pode motivar os alunos a participarem ativamente das aulas de Matemática?" Tendo em vista nossa questão de pesquisa, o objetivo de nosso trabalho foi desenvolver o cálculo mental visando ressignificar as operações matemáticas e privilegiar a participação ativa dos estudantes, o estudo centrou nas noções de contagem, adição, subtração e multiplicação e suas diferentes representações, consideradas como conhecimentos prévios possíveis de serem mobilizados pelos alunos que participaram da pesquisa.

O cenário no qual o Subprojeto Matemática iniciou suas atividades, veio cheio de novidades e de questionamentos a todos os envolvidos no Programa Residência Pedagógica. Durante toda a pandemia, professora preceptora e demais professores da escola, assim como todos aqueles que atuaram no ensino remoto, fizemos uso de muito jogos on-line para introdução, estudo e revisão dos conteúdos, além da motivação, participação e diálogo entre os alunos, Isso nos conduziu a buscar mudanças nas metodologias utilizadas diariamente no ensino presencial em sala de aula, além de que, no retorno presencial, observamos que os alunos do terceiro ano em sua grande maioria, chegaram com a alfabetização, escrita, contagem, raciocínio lógico e matemático abaixo do esperado para este ano escolar. Desse modo, foi preciso pensar em modos de enfatizar o lúdico em sala de aula e, o cálculo mental foi considerado como um grande aliado, pois todos os alunos poderiam participar independente da sua alfabetização.

Sendo assim, a opção pelos jogos foi considerada interessante em função dos estudos de Vygotsky (2021) sobre o tema, pois o autor ressalta que os jogos educacionais são uma alternativa de ensino e aprendizagem, servindo como incentivador e estimulando as relações cognitivas e afetivas.

Após discussão sobre o papel dos jogos em nossas aulas, e da importância de utilizar o cálculo mental e em acordo com a base nacional comum curricular (Brasil, 2018, p.276) que destaca que os jogos "tem um papel essencial para a compreensão e utilização das noções matemáticas", decidimos propor aos alunos que jogassem o jogo "O rei da Matemática Júnior". Segundo Silveira (1999) os jogos computadorizados oferecem ao aluno um ambiente rico e complexo, estimulando o desafio, a fantasia e a curiosidade dos alunos, além da participação e envolvimento com a atividade proposta.

Destacamos que os jogos foram utilizados, tanto para a introdução do tema de estudo, como para a ampliação da compreensão dos conceitos e noções, uma vez que o processo de ensino e aprendizagem no pós-pandemia necessitava ser motivador para todos os alunos. Para a avaliação da aprendizagem dispunham do registro das produções dos alunos por meio do software e observação dos bolsistas da residência pedagógica e professora preceptora.

A dinâmica considerada nas aulas foi centrada na entrega de um tablet para cada aluno, após o aluno foi orientado a entrar no jogo, cadastrar o nome ou apelido, escolher um avatar e iniciar o jogo. Durante o processo fomos tirando as dúvidas, mas destacamos que os alunos faziam trocas de conhecimento o que enriqueceu ainda mais o processo.

Destacamos que tivemos como objetivo neste artigo refletir sobre as estratégias de cálculo mental associada aos jogos on-line como transformadora da dinâmica da aula de matemática, da importância da abordagem lúdica e prática no ensino, especialmente nos anos iniciais, para alunos com dificuldades de aprendizagem ou que não estejam alfabetizados. Na sequência, apresentamos brevemente o referencial teórico da pesquisa.

2. REFERENCIAL TEÓRICO

Tomamos como referência ao nosso estudo, uma experiência bem-sucedida com o cálculo mental apresentado por Douady (1994), devido a semelhança entre a sala de aula retratada e a nossa sala. O relato conta sobre uma classe de quinto ano, após a professora perceber que 11 dos 24 alunos não conseguiam ler um texto simples de matemática. Com o objetivo de trabalhar com números e operações, a professora utilizou de 10 a 30 minutos de cada aula, por pelo menos 2 meses. Desse modo, foi possível estudar os números, relações entre estes e propriedades das operações. A autora relata que a prática desenvolveu e enriqueceu o conhecimento dos alunos ao longo do ano e que até problemas considerados difíceis puderam ser estudados.

Consideramos relevante a experiência, pois ao retornarmos do período pandêmico, detectamos que dos 60 alunos dos terceiros anos, 27 não liam e nem escreviam, sendo necessário repensar nossa metodologia diária de sala de aula, o que nos levou a considerar os jogos e o cálculo mental como alternativas adequadas.

Ainda tomamos como referencial Grando (2000) para tratar do ensino e aprendizagem da matemática, ao afirmar que “nota-se uma certa carência de significação atribuída aos conteúdos matemáticos a serem compreendidos pelos alunos (p.12), mostrando por meio de seus estudos que os jogos podem reverter este quadro, conforme citação a saber:

> A busca por um ensino que considere o aluno como sujeito do processo, que seja significativo para o aluno, que lhe proporcione um ambiente favorável à imaginação, à criação, à reflexão, enfim, à construção e que lhe possibilite um prazer em aprender, não pelo utilitarismo, mas pela investigação, ação e participação coletiva de um "todo" que constitui uma sociedade crítica e atuante, leva-nos a propor a inserção do jogo no ambiente educacional, de forma a conferir a esse ensino espaços lúdicos de aprendizagem. (p.15).

Além da importância dos jogos para o ensino, alguns autores (Grando, 2000); Berticelli e Zancan (2021); Bittar e Freitas (2005), apontam que o desenvolvimento da habilidade de cálculo mental nos alunos é indispensável para uma compreensão significativa do número e de suas propriedades além do uso prático nas atividades cotidianas. Grando (2000) ressalta que “a habilidade com o cálculo mental pode contribuir na aprendizagem de conceitos matemáticos (relações/operações/regularidades/álgebra/proporcionalidade) e ao desenvolvimento da aritmética”, (p. 47).

A importância do cálculo mental ao pensamento matemático se apoia no fato de que um mesmo cálculo pode ser realizado de diferentes maneiras, considerando os números e as operações que serão realizadas. Desta forma:

> cada situação de cálculo mental se coloca como um problema em aberto, onde pode ser solucionada de diferentes maneiras, sendo necessário ao sujeito recorrer a procedimentos originais, construídos por ele mesmo, a fim de chegar ao resultado. A satisfação do sujeito frente à criação de suas próprias estratégias de cálculo mental, favorecem atitudes mais positivas frente à Matemática. (Grando, p. 47-48).

Assim, a prática do cálculo mental, pode contribuir para estratégias de resolução e controle do cálculo escrito. Além disso, Parra (1996), ao discutir a importância do cálculo mental no ensino da Matemática, defende que ele capacita para uma forma de construção do conhecimento que pode favorecer a uma conexão do aluno com o conhecimento matemático, porque permite que os alunos desenvolvam seus próprios procedimentos sem se limitar a um único processo.

Bittar e Freitas (2005) salientam que a estratégia de aprendizagem utilizando o cálculo mental deve ser iniciado cedo pois inúmeros motivos justificam o emprego do cálculo mental, um deles é o de que as crianças que efetuam essas técnicas demonstram, em geral, mais segurança ao resolver situações problemas do dia-a-dia. Isso as torna mais independentes, pois tem maior liberdade para escolher caminhos para a obtenção das soluções para um problema, possibilita ainda, compreender com mais facilidade as técnicas de cálculo. E o mais importante: estimula o raciocínio, uma vez que, para os alunos há sempre um desafio, ou seja, a procura do melhor procedimento de cálculo.

3. METODOLOGIA

Para encontrar um jogo adequado ao nosso propósito, lançamos mão da metodologia de pesquisa documental de Lüdcke e André (2013), a qual é desenvolvida por meio de documentos contemporâneos ou retrospectivos, considerados cientificamente autênticos. Desse modo, realizamos uma busca na web utilizando como descritor principal "jogos matemáticos", sendo obtidos muitas indicações. Após explorado cada site e jogo foi selecionado o jogo "O rei da matemática Júnior", por ter simples manuseio, trazer conceitos básicos da matemática e numa escala crescente de conhecimentos e complexidade. Para uso dos alunos, a professora comprou e instalou o jogo nos trinta tablets da escola para que fosse possível ser implementado em sala de aula.

4. RESULTADOS E DISCUSSÕES

O estudo dos números no ensino fundamental, tem como objetivo desenvolver o pensamento numérico e com relação aos cálculos, é esperado que os alunos "desenvolvam diferentes estratégias para a obtenção dos resultados, sobretudo por estimativa e cálculo mental, além de algoritmos e uso de calculadoras", BNCC (Brasil, 2018, p. 268), justificando a importância da nossa pesquisa.

A introdução das atividades de cálculo mental, juntamente com a aplicação do jogo "O rei da matemática Júnior", trouxe uma notável transformação na dinâmica da sala de aula. O envolvimento de alunos que antes demonstravam pouco interesse nas atividades matemáticas tornou-se visível. Essa mudança de comportamento não apenas evidenciou a eficácia das estratégias implementadas, mas também destacou a importância da abordagem lúdica e prática no ensino da matemática.

Podemos destacar alguns momentos em que os alunos se mostravam animados ao perceberem que era a hora da aula de matemática. Esses momentos ilustram a conexão positiva que foi estabelecida entre as atividades de cálculo mental e a motivação dos alunos. Também é válido ressaltar a importância de abordagens que proporcionem aos alunos um senso de realização tangível, pois isso pode ser um ponto crucial na construção de sua confiança e no incentivo à participação. E para isso o jogo se mostrou extremamente eficiente, deixando-os mais confiantes e destemidos ao realizarem as atividades.

A partir desses exemplos, podemos enfatizar como a introdução de estratégias de cálculo mental não apenas melhorou a proficiência numérica dos alunos, mas também despertou um interesse genuíno pela matemática. O uso do jogo como suporte de estudo não só promoveu a aprendizagem de maneira envolvente, mas também reforçou a ideia de que a matemática pode ser divertida e gratificante. Esses resultados ressaltam a importância de adaptar as estratégias de ensino para atender às necessidades e motivações individuais dos alunos, criando assim um ambiente de aprendizagem dinâmico e positivo.

5. CONCLUSÃO

A opção pelo cálculo mental, foi considerada para motivar os alunos a participarem das aulas em virtude das dificuldades de leitura e escrita apresentadas pelos alunos, em função do ensino remoto. Já o jogo on-line foi uma escolha pensando em potencializar a aprendizagem, revisar conteúdos, oportunizar ao aluno contato com várias representações para um mesmo objeto de aprendizagem e também, para dar agilidade ao processo de raciocínio do aluno.

O trabalho com cálculo mental possibilitou que os alunos atribuíssem sentido ao algoritmo, na medida em que permitiu que construíssem estratégias de antecipação e conferência de resultados

Diante do exposto, acreditamos que a utilização da metodologia de cálculo mental associada ao jogo on-line possibilitou o desenvolvimento do raciocínio, agilidade, troca com os pares e interesse pelos alunos, o que trouxe vários benefícios ao longo do estudo como maior concentração, melhora na quantidade de respostas corretas em relação a um questionamento. Além de agilizar o trabalho cognitivo, auxiliou na melhora do domínio do cálculo escrito e permitiu compreender e organizar as propriedades das operações numéricas.

Para os residentes pedagógicos foi uma rica experiência, pois puderam constatar que alunos que não leem ou escreve conseguem aprender matemática, compreender diferentes representações e participar ativamente de atividades, ou seja é possível incluir um aluno e fazê-lo avançar na aprendizagem da matemática, mesmo diante de grandes dificuldades.

Finalmente, enfatizamos que os resultados obtidos nesta pesquisa podem auxiliar professores e formadores a introduzir, com um fim desejado, o uso das tecnologias em sala de aula, especialmente o uso de jogos on-line, além de uma variedade de metodologias já bastante conhecidas por toda a educação matemática e recomendada na BNCC (2018), com o fim de fazer evoluir as relações de aprendizagem e interesse pela Matemática.

Destacamos ainda que, nossa pesquisa não esgotou muitas possibilidades de jogos, mostrando que utilizamos somente um jogo: “O rei da matemática Júnior”, num universo infinito de possibilidades. Além disso, por se tratar de um experimento realizado no âmbito de um projeto de residência pedagógica, teve um tempo curto de duração, o que limitou os resultados. Recomendamos para trabalhos futuros um tempo maior de uso de jogos on-line envolvendo o cálculo mental, além de várias possibilidades de jogos, de modo a ampliar a percepção dos investigadores quanto aos benefícios ou mesmo malefícios provocados por esta estratégia de ensino de matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental.

REFERÊNCIAS

[1] BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular -** BNCC. Brasília. Brasil, 2018. Disponível em http://basenacionalcomum.mec.gov.br/ Acesso em: 9 dez. 2022.

[2] BERTICELLI, D. G. D.; ZANCAN, S. **CalMe Pro - Cálculo mental para professores.** REnCiMa, São Paulo, v.12, n.4, p.1-21,jul./set.2021.

[3] BITTAR, M.; FREITAS, J. L. M. **Fundamentos e metodologia da matemática para os ciclos iniciais do ensino fundamental**. 2005.

[4] DOUADY, R. **Evolução da relação como o saber em matemática na escola primária**: uma crônica sobre o cálculo mental. Em Aberto. Brasília: INEP, n. 62, p. 33-42, 1994.

[5] GRANDO, R. C. (2000). **O conhecimento matemático e o uso de jogos na sala de aula**. [Tesis de doctorado, Universidade Estadual de Campinas]. http://matpraticas.pbworks.com/w/file/fetch/124818583/tese_grando%281%29.pdf.

[6] LUDKE, M.; ANDRÉ, M. E. D. A. (2013). **Pesquisa em Educação Matemática**: abordagens qualitativas. São Paulo: Editora EPU. O REI DA MATEMÁTICA JÚNIOR. Oddrobo Software AB. https://play.google.com/store/apps/details?id=com.oddrobo.komj&hl=pt_BR&gl=US

[7] PARRA, C. Cálculo mental na escola primária. In: PARRA, C.; SAIZ, I. **Didática da Matemática**: reflexões psicopedagógicas. Porto Alegre: Artes Médicas,1996, p. 186-235.

[8] SILVEIRA, S.R. (1999). **Estudo e Construção de uma ferramenta de autoria multimídia para a elaboração de jogos educativos.** Dissertação de Mestrado POA-PPGC UFRGS.

[9] VIGOTSKI, L. S. **História do desenvolvimento das funções mentais superiores**. Tradução Solange Castro Afeche. São Paulo: Martins Fontes, 2021. 516 p.

Capítulo 2

O ensino de Matemática nos Anos Iniciais: possibilidades e desafios

Míriam do Rocio Guadagnini

Resumo: Este relato de experiência teve por objetivo o ensino e a compreensão do conceito de números pares e ímpares para um grupo de alunos com dificuldades de aprendizagem, que frequentam o terceiro ano do Ensino Fundamental - Anos Iniciais, de uma escola da rede pública. Diante da dificuldade de escrita, leitura e compreensão dos conceitos matemáticos previstos para o ano letivo, propusemos a leitura de um livro paradidático de matemática que traz a brincadeira bem-me-quer, mal-me-quer associada ao conceito matemático de par e ímpar, de modo a apresentar uma matemática mais divertida e que tivesse algum sentido para os alunos, visto que tal brincadeira faz parte do cotidiano da maioria destes alunos. A base teórica foi constituída pela investigação matemática proposta por Ponte, Brocardo e Oliveira, a resolução de problemas enunciado por Onuchic e a pesquisa qualitativa de Bogdan e Biklen, teorias que apresentam elementos para elaborar, desenvolver e analisar a atividade. O desenvolvimento da atividade possibilitou discussões e interações entre alunos e professor potencializando a apropriação do conceito de par e ímpar, desenvolvimento do pensamento matemático e o raciocínio lógico, compreensão do texto, exercício da escrita, leitura e reflexão sobre o tema, além disso, a maioria dos alunos conseguiram fazer deduções e o levantamento de pistas acerca de como agir para prever o resultado corretamente.

Palavras-chave: números pares e ímpares, livro paradidático, brincadeira, investigação matemática, Ensino Fundamental-Anos Iniciais.

1. INTRODUÇÃO

Este texto trata de uma atividade desenvolvida junto a oito alunos do terceiro ano do Ensino Fundamental – Anos Iniciais, do Centro de Ensino e Pesquisa Aplicada a Educação – CEPAE da Universidade Federal de Goiás, localizada no município de Goiânia. A escola conta com duas turmas de terceiro ano, totalizando 60 alunos, dos quais oito apresentaram dificuldades em matemática e também em língua portuguesa.

Os oito alunos selecionados não têm diagnóstico formal, no entanto, eles não apresentam os conhecimentos prévios requeridos para o ano, nem se desenvolvem conforme os demais alunos, dessa forma, julgamos que um trabalho interdisciplinar poderia favorecer a aprendizagem destes.

Foi desenvolvida em dois encontros (5 horas), uma atividade com base no texto literário de Bari (2001), "Bem-me-quer, mal-me-quer! Margarida par ou margarida ímpar?" Tivemos por questionamento central "Como ajudar Risonho a entender porque o resultado da contagem das pétalas de margarida foi mal-me-quer e se seria possível prever esse resultado".

O projeto denominado de Ponto de Apoio de Matemática, acontece no contraturno das aulas, uma vez por semana, com 2h30 de duração, voltado para aqueles que apresentam alguma dificuldade de aprendizagem na disciplina. O objetivo deste, no terceiro ano é o desenvolvimento da leitura, escrita pensamento e raciocínio lógico matemático, pois o aluno ainda está em processo de alfabetização, e, caso não consiga ler e compreender um texto ou situação, será previsível que não consiga fazer suposições ou mesmo encontrar a solução para uma questão que demanda o uso da matemática, bem como não conseguirá registrar de forma legível seu pensamento acerca da situação.

Assim, cada professor em sua disciplina, verifica os alunos com dificuldades e faz uma convocação a família responsável, que por sua vez, envia o aluno no contraturno no dia e horário fixado para tal atendimento.

Destacamos que nesta escola, no primeiro e segundo ano é majoritário a presença de professores pedagogos com apenas especialistas em arte e educação física, já a partir do terceiro ano as diversas disciplinas são ocupadas por professores especialistas na área, assim, o professor de matemática é formado na área. A decisão do professor de matemática iniciar desde os anos iniciais foi considerada importante para o departamento de matemática da escola, visto que a disciplina tem à sua disposição um laboratório de educação matemática que possibilita a implementação de jogos, uso de material concreto, desenvolvimento de projetos e de aulas de investigação matemática (com material próprio) a partir do quinto ano, além de professores capacitados e da possibilidade de receber estagiários da área ou áreas afins da universidade, o que enriquece muito a formação matemática dos futuros professores.

Os encontros, foram divididos em duas etapas, na primeira, as crianças eram recepcionadas e apresentas ao assunto a ser tratado, geralmente uma história matemática com o intuito de alavancar a alfabetização e a aprendizagem matemática. A professora por meio do diálogo realiza questionamentos acerca da temática, a fim de verificar os conhecimentos prévios dos alunos. Em seguida acontecia o momento da leitura compartilhada. Após, os alunos são chamados a verbalizar sobre a sua compreensão do texto lido, qual a problemática apresentada, o desenvolvimento e o resultado, tudo mediado pelo professor a fim de garantir que todos compreenderam o assunto. Na sequência, passamos às discussões de moral do texto, por exemplo: foi certa a atitude? O que o personagem poderia ter feito? Como poderia ter resolvido a situação? Oportunizando ao aluno a reflexão e tomada da melhor decisão mediante aquela situação. Após toda a discussão sobre o texto, é chegada a hora da realização dos registros escritos ou figurais deste. Na sequência, os alunos compartilham com o grupo seus registros, e cabe ao professor as devidas correções de escrita ou mesmo de compreensão.

Numa segunda etapa do encontro, trabalhamos com a situação matemática que foi apresentada no texto. Nesta etapa, o aluno irá ler a situação proposta e relatar sua interpretação. O professor desenvolverá uma discussão com o objetivo de estimular e verificar se houve a compreensão por todos. Segundo Freitas (2010), cabe ao professor estruturar as atividades de forma que haja o envolvimento ativo dos alunos e lhes proporcionar atividades que contribuam para essa aprendizagem, permitindo-lhes momentos de investigação e reflexão acerca do objeto matemático.

Nesta discussão, Brousseau (1986) destaca que o professor deve se atentar às suposições dos alunos, para que eles não se distanciem demais do objeto em estudo, bem como, não dê respostas acabadas, pois o aluno perderá o entusiasmo, não haverá aprendizado sem que haja suposições, testagem e compreensão. Na sequência, os alunos resolvem a tarefa, organizando os dados, realizando as anotações e cálculos necessários. Neste relato, abordamos apenas a experiência vivenciada pelos alunos, acerca da situação matemática apresentado no texto.

2. APORTES TEÓRICOS

A ênfase dada a matemática do terceiro ano do Ensino Fundamental, de acordo com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), é a "leitura, escrita, comparação e ordenação de números naturais de quatro ordens e a composição e decomposição de números naturais, de modo que o estudante possa ler, escrever e comparar números naturais e identificar características do sistema de numeração decimal" (Brasil, 2017, p.284-285), justificando assim, o ensino de números pares e ímpares nesta série.

Para o desenvolvimento da aula nos ancoramos na metodologia de Investigação Matemática proposta por Ponte, Brocardo e Oliveira (2003), e na resolução de problemas destacado por Onuchic (1999).

A metodologia de investigação matemática é uma via aceita e recomendada por estudiosos como uma das possibilidades de elaborar, organizar e aplicar uma tarefa além de promover a compreensão de um objeto matemático.

De acordo com Ponte, Brocardo e Oliveira (2003) um trabalho de investigação pode "despertar o espírito investigativo do aluno, à medida que este é chamado a agir como um matemático" (p. 23), além disso, a investigação em matemática faz a ponte entre a situação concreta e o conceito matemático, estabelecendo uma relação entre estes.

Os autores supracitados destacam que, para o desenvolvimento de uma atividade de investigação, é necessário observar três pontos essenciais: o primeiro trata da introdução da atividade, podendo ser oral ou escrita, o segundo ponto trata do desenvolvimento da atividade: individual, em duplas, em grupos ou com toda a turma. No terceiro, sublinham a discussão da atividade, em que, o aluno compartilha com os demais as suas conclusões. Os autores ressaltam a importância destas etapas, pois desenvolvem a capacidade de ouvir, refletir, questionar, mobilizar conhecimentos matemáticos e argumentar, culminando num processo que poderá suscitar numa assimilação da situação.

Assim, em acordo com os princípios da investigação matemática, elaboramos uma atividade matemática a partir do texto literário, Bari (2001), Bem-me-quer, mal-me-quer! Margarida par ou margarida ímpar? que foi introduzida após a leitura do texto. Na sequência, ocorreu a leitura e compreensão da atividade a ser realizada e, finalmente, após a realização por todos os alunos, houve a discussão.

Em acordo com Sierra (2006) pontuamos que a estrutura do processo de introdução, desenvolvimento e discussão do estudo não foi linear. Cada momento foi vivido com intensidades diferentes, em momentos diferentes, quantas vezes foram necessárias durante todo o processo de estudo, alguns deles aparecerem simultaneamente, porém ao professor coube proporcionar e criar o ambiente para que todas a etapas fossem percorridas.

Além da investigação matemática, também utilizamos elementos da resolução de problemas, pois de acordo com Polya (2006) é importante que os problemas sejam provocativos, pois quando o aluno é desafiado na busca de solução, suas emoções de entusiasmo são despertadas e certamente vão despertar o interesse do mesmo em resolvê-los. Desse modo, nosso questionamento foi "Como ajudar Risonho a entender porque a margarida que ele contou no final resultou em mal-me-quer e como ele poderia prever o resultado".

A metodologia de resolução de problemas possibilita ao aluno a pesquisa, a construção e a compreensão dos conceitos matemático, pois a estruturação de conhecimento baseada na resolução de uma situação concreta, permite a assimilação e facilita o reinvestimento deste saber nas mais diversas situações. Segundo Onuchic (1999), a resolução de problemas é uma ferramenta ativa de compreensão do problema, pois à medida que a compreensão se torna significativa favorece a aptidão do uso da matemática para a resolução de problemas.

Com relação a metodologia utilizado neste estudo, enfatizamos que a atividade foi desenvolvida com oito alunos do terceiro ano do Ensino Fundamental, com idade entre 8 e 9 anos. A aula tinha como objetivo a compreensão do conceito de números pares e ímpares. Os procedimentos metodológicos utilizados para a obtenção dos dados constituíram-se em: diário de campo do professor e registro das produções dos alunos por meio do arquivamento de cópia da atividade proposta.

Este estudo está alicerçado na metodologia da pesquisa qualitativa que, segundo Bogdan e Biklen (2010), corresponde a uma pesquisa cuja fonte de dados é o ambiente natural e na qual o pesquisador é seu principal instrumento. Para a coleta de dados, são propostos instrumentos para os quais os dados possam ser predominantemente descritivos, de modo que o processo seja mais importante que o produto, e que o significado esteja associado ao sentido dado ao objeto da pesquisa pelos indivíduos que dela participam e cuja análise dos dados segue um processo de busca de evidências que respondam às questões ou hipóteses definidas previamente ao desenvolvimento da pesquisa.

3. A EXPERIÊNCIA

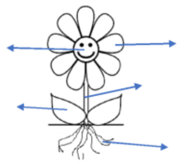
Na aula tratamos do tema Números pares e ímpares. Iniciamos apresentando a livro: *Bem-me-quer, mal-me-quer! Margarida par ou margarida ímpares?* (Bari, 2001). O texto apresenta três personagens: Risonho: personagem principal, Bacana: o amigo, e Lindinha: a amada. A história conta que Risonho estava muito tristonho, então o amigo Bacana pergunta a ele o que estava acontecendo. Risonha então conta ao amigo que disse a

Lindinha que gostava muito dela. Ela então pediu para que ele provasse o que dizia. Como eles estavam em um jardim, teve a ideia de pegar uma margarida e começa a tirar suas pétalas contando bem-me-quer e mal-me-quer para cada pétala retirada. Porém, aconteceu o inesperado, ao final da contagem o resultado foi mal-me-quer. Lindinha ficou furiosa e foi embora e por isso ele estava muito triste.

O amigo Bacana ao ouvir o relato, pergunta a Risonho se a margarida que ele usou era par ou ímpar. Risonho, achou a pergunta do amigo estranha e disse que não estava entendendo por que precisava saber isso. A partir de então, interrompemos a leitura da história pelos alunos e apresentamos uma atividade de investigação voltada para o raciocínio lógico-dedutivo, a saber:

Figura 1: Atividade proposta

1. Identifique as partes da margarida: Pétala, semente, caule, folha e raiz.



2. Represente margaridas com:

4 pétalas	5 pétalas	6 pétalas	7pétalas

3. Conte bem-me-quer e mal-me-quer em cada uma das margaridas acima. Anote B para bem-me-quer e M para mal-me-quer, como terminará?

4 pétalas	5 pétalas	6 pétalas	7pétalas

4. Escreva porque você acha que isso acontece:

----

5. Como você acha que Risonho deveria fazer para que ao contar bem-me-quer e mal-me-quer numa margarida para Lindinha nunca desse mal-me-quer.

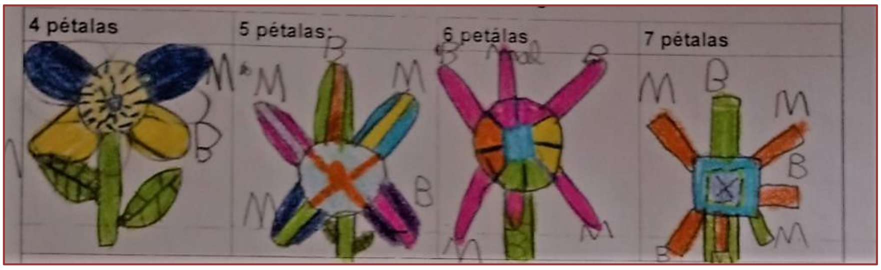
Fonte: Elaborado pela autora (2019).

Inicialmente solicitamos aos alunos que identificassem as partes de uma margarida, a fim de identificar os conhecimentos prévios acerca das principais partes de uma planta e se identificam o que são as pétalas, se já tiveram contato com uma margarina e reconheciam a sua forma.

Observamos que os alunos reconhecem as partes das plantas, no entanto, não reconhecem o objeto margarida. Perguntamos qual era a cor da margarida. Obtivemos resposta, amarela, branca e rosa. Assim, explicamos que a margarida tem pétalas brancas e o miolo (semente) é amarelo e, usando a tecnologia mostramos uma foto de margarida. Assim os alunos poderiam melhor compreender a história. Outro questionamento foi se já fizeram ou conhecem esta brincadeira de bem-me-quer e mal-me-quer. Alguns alunos já tiveram contato com ela e outros não. Assim foi necessário explicitarmos a ideia da brincadeira e representá-la com uma flor de papel.

Na atividade dois, solicitamos que o aluno representasse uma margarida de 4, 5, 6 e 7 pétalas respectivamente, obtivemos por um dos alunos a seguinte figura:

Figura 2: Aluno Kako



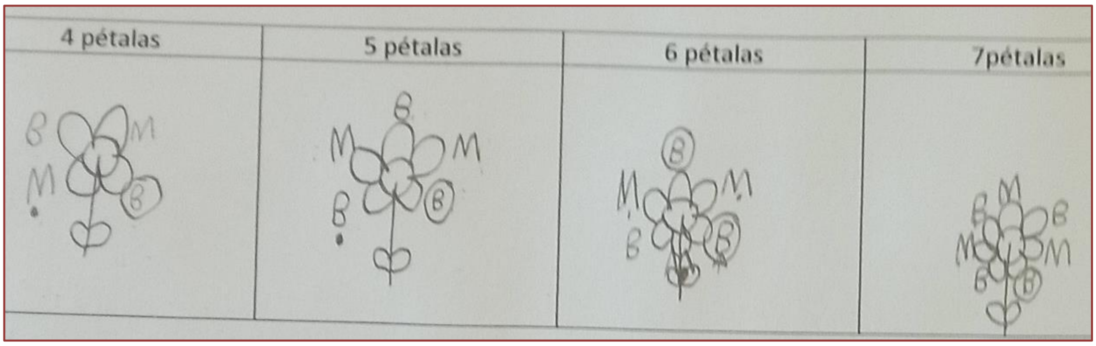
Fonte: Arquivo da autora (2019).

Nesta tarefa, nosso objetivo era verificar se houve a compreensão do texto, e se o aluno estabelecia uma relação entre a contagem na flor com número de pétalas pares e ímpares.

Na produção, pudemos avaliar que o aluno compreendeu a noção de pétalas pois conseguiu reproduzir de acordo com a quantidade esperada. No entanto, o aluno não se preocupou em reproduzir as cores típicas da margarida, colorindo com cores multivariadas. Ainda observamos que na margarida de 7 pétalas, ele erra ao alternar entre B (bem-me-quer) e M (mal-me-quer) as pétalas. Destacamos que o aluno, marca um ponto ao lado da letra B ou M para denotar o início da contagem.

Já a aluna Mei, representa a quantidade de pétalas requeridas e justifica que não pintará porque a margarida é branca. Denota o início da contagem por um círculo e um ponto para o fim da contagem e não apresenta erro na alternância entre B e M.

Figura 3: Aluna Mei

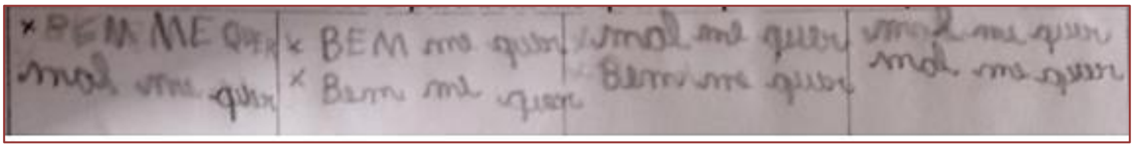


Fonte: Arquivo da autora (2019).

Na sequência, atividade 3, interrogamos: Ao contar bem-me-quer e mal-me-quer em cada uma das margaridas, como terminará a contagem? Pedimos para que usassem B para indicar bem-me-quer e M para indicar mal-me-quer, anotando em cada pétala. Além disso, solicitamos que destacassem por onde começou a contagem, se bem ou mal-me-quer e onde terminou.

Destacamos, a produção do aluno Téo, a saber:

Figura 4: Aluno Téo

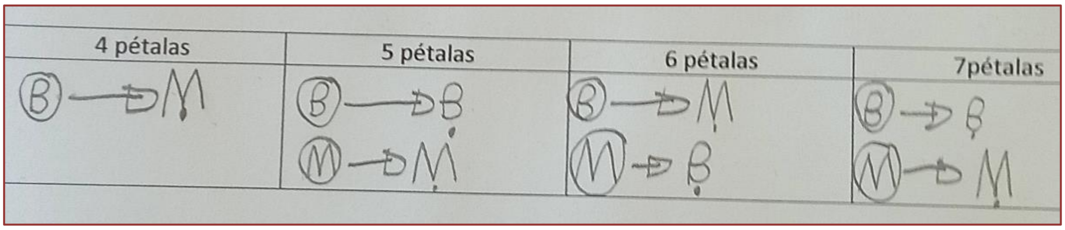


Fonte: Arquivo da autora (2019).

A figura evidencia que a primeira anotação corresponde ao início da contagem e a última, ao término da contagem em cada uma das margaridas, de 4, 5, 6 e 7 pétalas respectivamente. Após este registro, pedimos aos alunos que verificassem como começou a contagem e como terminou, interrogando-os: será que a contagem começa e termina sempre igual?

Destacamos a atividade da aluna Mei, ela apresenta um registro sofisticado diante dos demais, pois utiliza a flecha para indicar o início e fim da contagem bem como o uso das siglas B e M com facilidade. Perguntamos sobre o segundo registro presente no quadro, ela justifica que contou tanto começando por B quanto por M para verificar se tinha feito corretamente.

Figura 5: Aluna Mei



Fonte: Arquivo da autora (2019).

Na sequência perguntamos aos estudantes como ficou o quadro de anotações e qual a percepção. Veja as discussões:

Aluno Kako: Começa de um jeito e termina de outro.

Aluno Beto: Não, termina do jeito que começa.

Prof: Na margarida com 4 pétalas, como começaram? Por bem-me-quer ou mal-me-quer e como termina?

Aluno Guto. Comecei por bem-me-quer e terminou em bem-me-quer.

Aluno Duda. Comecei em mal-me-quer e deu bem-me-quer.

Aluno Mei: Eu comecei em bem-me-quer e terminou em mal-me-quer.

Aluno Téo: Eu também

Prof: E aí será o que aconteceu? Para uns a contagem começa de um jeito e termina de outro e para outros começa e termina do mesmo jeito.

Desse modo, após todos dizerem a sua resolução, verificamos que algumas crianças registraram alternando a sequência das pétalas entre B (bem-me-quer) e M (mal-me-quer), já outros não. Assim, estudantes e professores ajudaram os estudantes a detectarem o erro e a corrigí-lo.

Foi possível concluir que para a margarida de 4 pétalas se a contagem começar por B, a última pétala será M e vice-versa. Ao interrogá-los sobre como poderia ser classificado o número 4*? Os alunos KaKo, Guto e Mel responderam que seria um número Par.*

Seguimos para a margarida de 5 pétalas. Nesta procedemos da mesma forma que na anterior, questionando como começou a contagem e como terminou.

Aluno Kako: Comecei em M e terminou em M.

Alunos Guto e Beto: Também deu assim.

Aluno Mei: Comecei em B e terminou em B.

Alunos Duda: O meu também.

Prof.: Por que vocês acham que isso aconteceu? Retomamos a atividade anterior, em que tínhamos 4 pétalas e os resultados obtidos. Já para 5 pétalas, vocês estão dizendo que começa e termina com a mesma palavra. O que será que está acontecendo? Pedimos então, que resolvessem para as 6 e 7 pétalas para ver o que ia acontecer.

Após as anotações, verificamos que o aluno Kako havia contado erroneamente. Mostramos a este aluno que para 7 pétalas ele fez a sequência M, B, M, B, M, M, B, que é necessário que este intercale um B e depois um M, pois é assim que acontece na brincadeira. Na continuação, solicitamos que os alunos falassem sobre suas anotações para 6 e 7 pétalas.

Para 6 pétalas os alunos Mei, Duda, Guto, Beto obtiveram os resultados semelhante, ao começar por B terminaram em M ou ao começar por M terminaram B. Para 7 pétalas, os alunos Téo, Beca e Léo iniciaram a contagem por M e terminou em M. Rafa iniciou por B e terminou por B.

Após realizarem a atividade acima descrita, pedimos para que observassem os resultados para cada margarida e respondessem ao questionamento seguinte:

Prof.: Em todas as margaridas se começar a contagem de uma forma termina igual ou diferente?

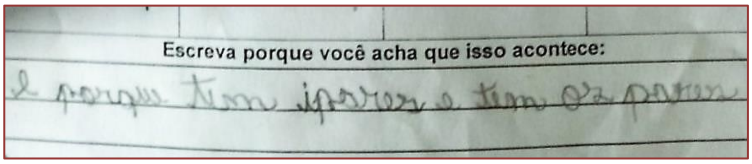
Aluno Kako. Algumas igual, outras diferentes.

Prof.: Por que será que isso acontece? O que vocês acham que pode ser a causa disso? Vamos anotar.

Obtivemos algumas respostas como: *Aluna Beca: Porque os números são diferentes*. *Aluno kako: Porque os números são pares e ímpares.* Também identificamos respostas relacionadas como a forma de contagem, como escreve o *Aluno Léo: primeiro começa em M ou B*, evidenciando ainda que o aluno não avançou no entendimento dos motivos geradores da situação.

Destacamos a produção dos alunos Guto e Mei, a seguir:

Figura 6: Aluno Guto

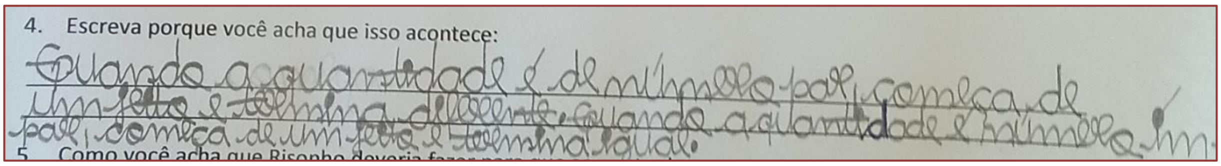


Fonte: Arquivo da autora (2019).

Verificamos que o aluno compreendeu a motivação do resultado da contagem ser diferente para as margaridas, ou seja, trata-se de margaridas que tem quantidade de pétalas pares e ímpares. O resultado foi bastante importante, pois advém de um aluno que apresenta sérias dificuldade na escrita e interpretação de texto, porém, facilidade com o raciocino lógico.

A aluna Mei, apresenta um entendimento adequado e uma escrita muito esclarecedora.

Figura 7: Aluno Mei



Fonte: Arquivo da autora (2019).

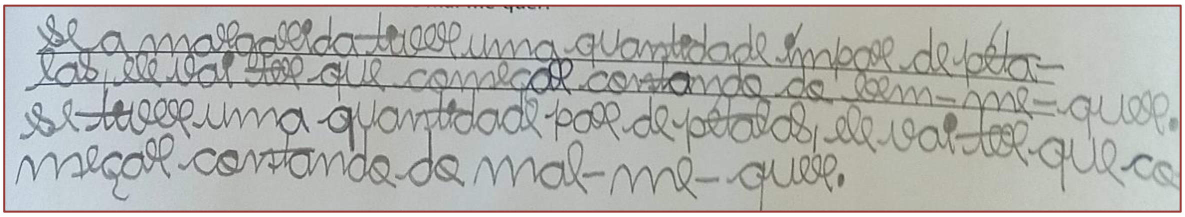
Interrogamos os alunos para quais quantidades de pétalas a contagem começava e terminava igual: Resposta, 5 e 7, e começava e terminava diferente: 4 e 6. Anotamos no quadro-negro em forma de tabela e começamos a questionar o que estes números têm em comum. Os alunos logo perceberam que se tratava de números pares e ímpares. Desse modo, começamos a questionar com relação a outros números. Se tivéssemos uma margarida com 11 pétalas e começássemos a contar por bem-me-quer, como terminaria? Esse número é par ou ímpar? Em qual das tabelas colocaríamos?

O aluno responde, na primeira tabela, 11 é ímpar. Então toda vez que a pétala é ímpar começa e termina igual? Vamos testar? que tal 17, vamos fazer mentalmente. Após alguns minutos a resposta foi afirmativa para 3 dos alunos. Os demais se perderam na contagem, demonstrando a necessidade de o professor trabalhar mais com o cálculo mental. E se a margarida tivesse 10 pétalas como ficaria a contagem começando por B. Para todos os pares isso acontece? Cada um testa um número par, começando por B. Foi testado 8, 12, 20...

Por fim questionamos o que Risonho deveria fazer para que ao contar bem-me-quer e mal-me-quer numa margarida para a Lindinha nunca desse mal-me-quer*?* Obtivemos respostas como a do *Aluna Beca: Começar com B quando ímpar e M quando par*, destacamos que há o entendimento de que de acordo com o número de pétalas, é necessário pensar para obter a resposta desejada. *Aluno Téo: Começar no mal-me-quer e contar até o número 20 e vai dar no bem-me-quer.* Ou seja, o aluno deixa implícito que para números pares a contagem termina diferente do modo como começou, evidenciando a compreensão da situação apresentada, porém necessita avançar no conceito.

Destacamos a produção da aluna Mei que nos surpreendeu em sua produção, pela riqueza de detalhes em sua escrita e pela compreensão da situação, reforçando a importância da resolução de problemas e da investigação matemática.

Figura 8: Aluno Mei



Fonte: Elaborado pela autora.

4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

A ideia da atividade é mostrar aos nossos estudantes que a leitura do mundo está associada a leitura de números. Levamos para os encontros diferentes tipos de textos com linguagens diversas: histórias em quadrinhos, poemas, textos literários todos eles com uma temática associada à matemática, por exemplo medidas, consumo, tempo-horas, multiplicação, divisão, soma, subtração.

Entender o sentido das palavras, das frases e dos textos é importante para que os alunos consigam pensar logicamente, para que a matemática não se restrinja a memorização de regras e sequências numéricas. Além disso, o uso da investigação aliada a resolução de problemas estimula a reflexão, a suposição, a busca por uma solução, facilitando o uso de estratégias.

Em todos os encontros do projeto Ponto de Apoio, o registro escrito está presente, seja de forma individual, em que cada criança escreve sobre o que pensa acerca da temática trabalhada ou na forma de escrita coletiva, em que todos opinam juntos, construindo o registro no quadro negro. Esse trabalho contribui de modo significativa para a autonomia de pensamento dos estudantes, pois ao registrarem o pensamento por meio de textos estão elaborando, pensando e criando, são protagonistas do próprio conhecimento.

Ao final da aula, foi possível observar que alguns alunos puderam compreender que o resultado da contagem não é aleatório, depende da quantidade de pétalas que a margarida possui, par ou ímpar e, que de acordo com a resposta requerida, o indivíduo pode agir para prever o resultado, ou seja, se quer uma resposta B, precisa observar primeiro a quantidade de pétalas e decidir por onde começar, se B ou M, assim não haverá erros.

Outro fator importante foi os alunos perceberem que numa brincadeira simples, existe uma matemática por trás que norteia as decisões a serem tomadas.

Finalmente destacamos que, ao longo do ano visitamos muitas histórias matemáticas, desenvolvendo um trabalho similar ao apresentado acima, no entanto, não foi suficiente para que alcançássemos todos os alunos. Conseguimos com este trabalho uma melhora significativa na aprendizagem de 6 dos 8 alunos, desse modo, recomendamos para trabalhos futuros um tempo maior semanal para o trabalho com alunos com dificuldades e turmas menores de até 5 alunos, de modo a ampliar a percepção quanto aos benefícios produzidos por esta estratégia de ensino nos anos iniciais do Ensino Fundamental.

REFERÊNCIAS

[1] BARI, A. **Bem-me-quer, mal-me-quer!** Margarida par ou margarida ímpares? Série Matemática em cena. São Paulo: Scipione, 2001.

[2] BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular.** Brasília: MEC, 2017. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/wp-content/uploads/2018/02/bncc-20dez-site.pdf. Acesso em: 2 de março de 2020.

[3] BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. **Investigação qualitativa em educação:** uma introdução à teoria e aos métodos. Portugal: Porto editora, 2010.

[4] BROUSSEAU, G. Fondements et Méthodes de la Didactique des Mathematiques. Recherchers em Didactique des Mathématiques. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, v. 7, n. 2, p. 33-115, 1986.

[5] FREITAS, J. L. M. **Teoria das Situações Didáticas.** In: MACHADO, S. D. A. (Org). Educação Matemática: Uma (nova) introdução. 3. Ed. São Paulo: EDUC, 2010. p. 77-112.

[6] POLYA, G. A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático. Tradução e adaptação: Heitor Lisboa de Araújo. 2 reimpressão. Rio de Janeiro: Interciência, 2006.

[7] PONTE, J. P.; BROCARDO, J.; OLIVEIRA, H. **Investigação Matemática na sala de aula.** Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

[8] SIERRA, T. A. **Lo matemático em el diseño y analisis de organizaciones didácticas: los sistemas de numeración y la medida de magnitudes**. 2006. 478 f. Universidad Complutense de Madrid, Facultad de Educación, Departamento de Didáctica y Organización Escolar Madrid, 2006.

[9] ONUCHIC. L.R. Ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas. In: **Pesquisa em Educação Matemática**: concepções & perspectivas. Maria Ap. V. Bicudo (org). Editora Unesp: Rio Claro. 1999.

Capítulo 3

Adição e subtração de frações utilizando material manipulativo a partir dos princípios da Engenharia Didática

Luciane Gobbi Tonet
Camila Gasparin Magnaguagno
Luiza Santos Morin

Resumo: Este trabalho aborda uma sequência de atividades aplicadas em uma turma de 6° ano do Ensino Fundamental, em uma escola da rede particular no munícipio de Caxias do Sul- RS, com o objetivo de trabalhar a adição e subtração de frações a partir da equivalência de frações. Para alcançar tal objetivo, foi utilizado um material manipulativo denominado frações circulares. Com esta perspectiva, espera-se que os alunos compreendam o significado destas operações. No decorrer da aplicação, pode-se perceber um aumento da autonomia dos estudantes e compreensão efetiva sobre o que significa adicionar e subtrair frações. O presente artigo é resultado da dissertação de mestrado de Magnaguagno (2024), apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, na Universidade Federal de Santa Maria – UFSM.

Palavras-chave: frações, frações circulares, operações, engenharia didática.

1. INTRODUÇÃO

Nos diferentes níveis de ensino, pode-se perceber certa resistência dos alunos quando o assunto é frações. Mesmo sendo um tópico abordado do 5º ao 9º ano do Ensino Fundamental, os alunos, frequentemente, afirmam não dominarem as operações básicas entre frações. Campos e Rodrigues (2007, p. 70) discorrem que:

> A prática de sala de aula, entretanto, revela que mesmo alunos de nível médio ou superior apresentam dificuldades no trato com as frações e demonstram não conhecer aspectos relevantes do conceito de número racional, o que acarreta prejuízos à compreensão de novos conceitos matemáticos.

Dentro desse contexto, como abordar a adição e subtração entre números fracionários de forma que os alunos percebam seu significado? Para tal, por meio dos princípios da metodologia da Engenharia Didática, juntamente com o material manipulativo denominado frações circulares, trabalhou-se a compreensão dessas operações a partir da equivalência de frações em uma turma do 6° ano do Ensino Fundamental, de acordo com a proposta da Base Nacional Comum Curricular (BNCC).

Por meio de materiais didáticos, o processo de aprendizagem torna-se significativo, desde que aliado à existência de objetivos claros e a efetiva ação do professor em sala de aula. Uma das principais referências para o desenvolvimento deste trabalho foi o livro "Materiais Manipulativos para o Ensino de Frações e Números Decimais", de autoria de Kátia Stocco Smole e Maria Ignez Diniz, no qual relatam que:

> De fato, qualquer recurso didático deve servir para que os alunos aprofundem e ampliem os significados que constroem mediante sua participação nas atividades de aprendizagem. Mas são os processos de pensamento do aluno que permitem a mediação entre os procedimentos didáticos e os resultados da aprendizagem. (Smole, Diniz; 2016, p. 10).

Dentre os materiais apresentados como alternativa para desenvolver a compreensão de frações e suas operações elegeu-se, para a prática proposta, as frações circulares. Esse material pedagógico é composto por círculos, todos de mesmo diâmetro, em cores diferentes, divididos em setores circulares, representando: um inteiro, meios, terços, quartos, quintos, sextos, oitavos, nonos, décimos, onze e doze avos, podendo variar de acordo com o material. como visto na Figura 1.

Figura 1 – Material das frações circulares

Fonte: Autoras (2024).

2. METODOLOGIA

Neste trabalhou, utilizou-se a metodologia da pesquisa-ação, definida por Fiorentini e Lorenzato (2012, p. 112) como:

> um tipo especial de pesquisa participante, em que o pesquisador se introduz no ambiente a ser estudado não só para observá-lo e compreendê-lo, mas sobretudo para mudá-lo em direções que permitam a melhoria das práticas e maior liberdade de ação e de aprendizagem dos participantes.

Em particular, a Engenharia Didática se apresenta como uma metodologia de investigação surgida, no âmbito da didática da matemática, no início da década de 1980, tendo por objetivo denominar uma forma do trabalho didático comparável ao trabalho de um engenheiro que, para realizar um projeto preciso, necessita se apoiar em conhecimentos científicos do seu domínio e submeter-se a um controle de tipo científico, embora seja obrigado a trabalhar sobre objetos mais complexos que os já estudados. (Artigue, 1996).

Neste contexto, a engenharia didática é caracterizada por um esquema experimental baseado no processo de quatro etapas:

1) Análises prévias: Segundo Almouloud (2010), um dos objetivos desta etapa "é identificar os problemas de ensino e aprendizagem do objeto de estudo e delinear de modo fundamentado a(s) questão(ões), as hipóteses, os fundamentos teóricos e metodológicos da pesquisa". A partir dessas análises, pode-se definir a(s) questão(ões) da pesquisa.

No caso deste trabalho, especificamente, optou-se pela realização de um questionário, disponível em Magnaguagno (2024), que abrange tanto as noções introdutórias de frações quanto algumas operações. A partir das observações promovidas pelo questionário, elaborou-se a proposta didática.

2) Concepção e análise a priori: Destina-se a elaboração e análise de uma sequência de situações-problema com o objetivo de responder à questão definida e validar as hipóteses descritas na fase anterior. De acordo com

> Almouloud (2010) “As atividades devem ser concebidas levando-se em consideração os resultados dos estudos prévios e permitir aos alunos desenvolver certas competências e habilidades.”

Para essa fase, foram elaboradas oito atividades, a serem resolvidas mediante uso de material manipulativo, baseadas nas dificuldades apresentadas pelos alunos no questionário aplicado na etapa das análises prévias.

3) Experimentação: Coloca-se em prática o que foi elaborado a partir das etapas anteriores, as quais podem ser corrigidas ou reajustadas, caso haja necessidade (Artigue, 1996).

O processo de experimentação consistiu na aplicação da sequência de atividades, elaboradas na fase anterior, como auxílio para a compreensão de diversos tópicos associados às frações. Assim, o papel do professor reside na elaboração das atividades e mediação das mesmas durante sua realização, enquanto as estratégias de resolução parte dos alunos.

4) Análise a posteriori e validação: É feita a partir da análise a priori, dos fundamentos teóricos, das hipóteses e problemas da pesquisa, bem como a partir dos dados obtidos nas sessões de ensino e as produções dos alunos em sala ou fora dela.

A validação consistiu em um questionário final respondido pelos alunos, disponível em Magnaguagno (2024), bem como das observações das atividades realizadas em aula.

Ao final do processo, surgem os resultados que contribuem para a melhoria dos conhecimentos didáticos que se têm sobre o saber analisado. Diferente de outras investigações experimentais, a validação nesta metodologia é essencialmente interna, a partir do confronto entre a análise *a priori* e a análise *a posteriori* (Artigue, 1996).

3. DESENVOLVIMENTO DA PRÁTICA PEDAGÓGICA

A prática pedagógica foi desenvolvida em uma turma do 6° ano do Ensino Fundamental, composta por 14 alunos, em uma escola da rede privada do município de Caxias do Sul (RS), no decorrer de 2023. Introduziu-se o conteúdo aos alunos no ano anterior à prática, necessitando de um aprofundamento conforme proposto pela BNCC.

3.1. ANÁLISES PRÉVIAS

Nesta etapa, optou-se pela realização de um questionário abrangendo noções introdutórias de frações e algumas operações, baseado em Ripoll *et al.* (2017). Por meio das observações promovidas pelo questionário, elaborou-se a proposta didática.

Para analisar os conhecimentos prévios dos alunos acerca da equivalência de frações e a nomenclatura envolvida, elegeu-se as questões de 1 a 5, ilustradas no Quadro 1.

Quadro 1 – Questões 1 a 5 das análises prévias

1. Preencha os $\square$ com números de forma a tornar as igualdades verdadeiras.

$a)\ \frac{5}{3}=\frac{\square}{6}$ b) $\frac{2}{3}=\frac{6}{\square}$ c) $\frac{8}{12}=\frac{\square}{3}$ d) $\frac{9}{12}=\frac{6}{\square}$ e) $\frac{6}{8}=\frac{\square}{12}$

2. Observando as frações $\frac{11}{6}, \frac{28}{15}$ e $\frac{37}{20}$:

a) Determine três frações de mesmo denominador que sejam equivalentes às frações $\frac{11}{6}, \frac{28}{15}$ e $\frac{37}{20}$ respectivamente.

b) Usando as frações do item a), identifique qual é a maior e qual é a menor fração entre as frações $\frac{11}{6}, \frac{28}{15}$ e $\frac{37}{20}$.

3. Complete as sentenças a seguir com os sinais > (maior) ou < (menor) de modo a torná-las verdadeiras.

$a)\ \frac{1}{3}\square\frac{2}{3}$ b) $\frac{3}{5}\square\frac{2}{5}$ c) $\frac{1}{2}\square\frac{1}{5}$ d) $\frac{1}{10}\square\frac{1}{20}$ e) $\frac{1}{35}\square\frac{1}{43}$ f) $\frac{1}{99}\square\frac{1}{100}$

4. Alex, Diana e Pedro são irmãos. Sábado à noite, Pedro pediu uma pizza que já veio cortada em 8 fatias. Distraído, Pedro comeu 4 fatias e deixou o restante para seus irmãos.

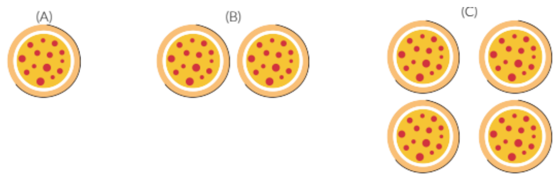
a) Qual foi a fração da pizza que Pedro comeu, considerando que estava dividida em 8 fatias?

b) Ao chegar na cozinha, Diana esbravejou: "Você comeu metade da pizza, Pedro". Diana tem razão ao dizer que a fração da pizza que Pedro comeu é $\frac{1}{2}$? Por quê?

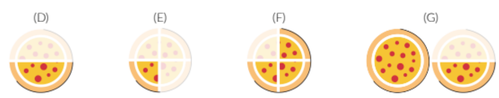
c) Se Diana comer dois dos pedaços restantes, encontre duas frações diferentes que representam a parte da pizza que Diana comeu.

5.Use a reta numérica para fazer o que é pedido nos itens a seguir.

a) Marque os pontos que representam as quantidades de pizza nos casos (A), (B) e (C) a seguir.



b) E agora, que pontos na reta numérica representam as quantidades de pizza dos casos (D), (E), (F) e (G)?

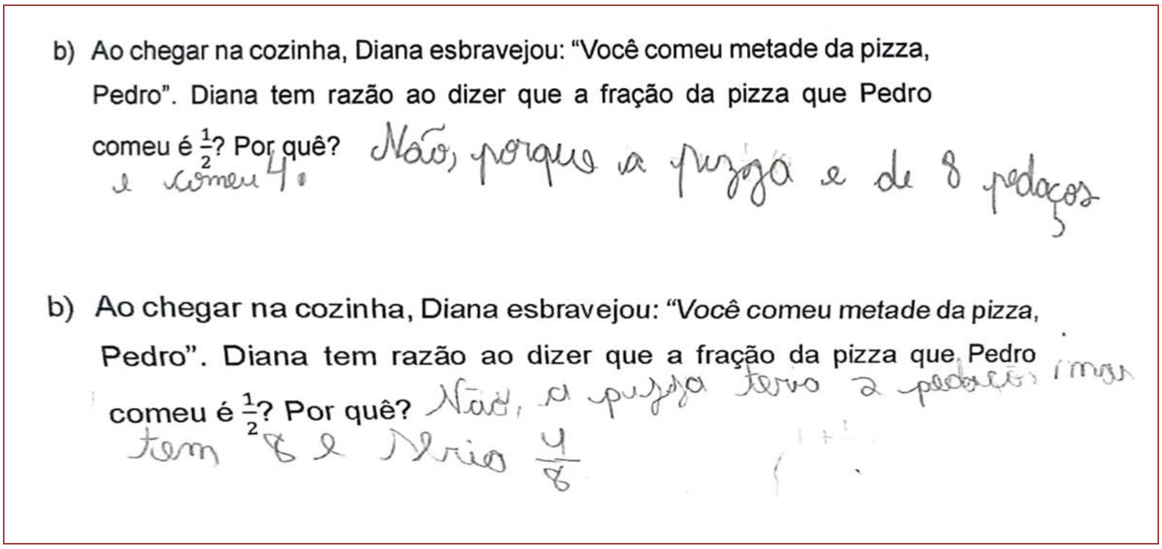


Fonte: Autoras (2024).

De modo geral, não foi possível observar um padrão nos erros cometidos, mas evidenciam-se dificuldades na interpretação do enunciado e na nomenclatura que envolve o assunto.

Na terceira questão, destaca-se a inversão entre numerador e denominador e respostas sem a notação adequada de frações. Na Figura 2, ilustra-se duas das justificativas apresentadas, na qual percebe-se que um aluno não compreende o significado de metade e outro aluno que não compreendeu o significado de frações equivalentes.

Figura 2 - Respostas à terceira questão


b) Ao chegar na cozinha, Diana esbravejou: "Você comeu metade da pizza, Pedro". Diana tem razão ao dizer que a fração da pizza que Pedro comeu é $\frac{1}{2}$? Por quê? Não, porque a pizza e de 8 pedaços e comeu 4.

b) Ao chegar na cozinha, Diana esbravejou: "*Você comeu metade da pizza*, Pedro". Diana tem razão ao dizer que a fração da pizza que Pedro comeu é $\frac{1}{2}$? Por quê? Não, a pizza tevo 2 pedaços mas tem 8 e Seria $\frac{4}{8}$

Fonte: Autoras (2024).

Dois alunos não responderam a letra c) e nenhum dos demais escreveu duas frações diferentes que corretamente representassem a parte da pizza comida por Diana. Na quinta questão, destacam-se dificuldades de alguns alunos ao representar os números inteiros na reta, referentes ao item (a), bem como aos fracionários destacados no item (b). No Quadro 2, estão dispostas as questões 6 e 7.

Quadro 2 – Sexta e sétima questões das análises prévias

6.Em cada um dos itens a seguir, faça a conta e uma ilustração que explique a maneira como você realizou o cálculo solicitado.

a) $\frac{3}{5}+\frac{1}{5}=$ b) $\frac{1}{3}-\frac{2}{9}=$ c) $\frac{1}{3}+1$

7.Calcule as operações indicadas, da forma que achar mais conveniente

a) $\frac{3}{7}+\frac{2}{7}=$ d) $\frac{5}{6}-\frac{2}{3}=$ g) $2-\frac{1}{2}=$

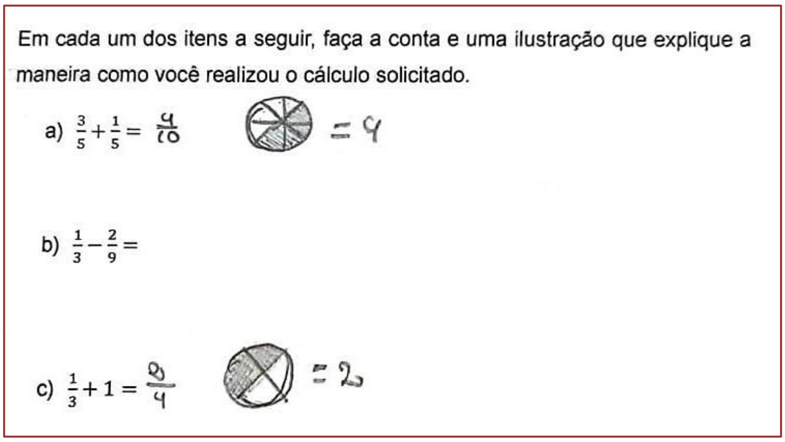
b) $\frac{5}{9}-\frac{3}{9}=$ e) $\frac{1}{8}+\frac{1}{7}=$ h) $\frac{2}{6}+2-\frac{2}{3}=$

c) $\frac{3}{10}+\frac{4}{5}=$ f) $\frac{2}{5}+\frac{3}{4}=$ i) $\frac{2}{5}+\frac{2}{7}-\frac{2}{3}=$

Fonte: Autoras (2024).

Três alunos fizeram uma ilustração, sendo que a mesma nem sempre foi utilizada para explicar o cálculo. Muitas respostas foram apresentadas sem os desenhos e/ou justificativa. A Figura 3, ilustra uma situação recorrente no que diz respeito a adição de frações. Percebe-se que o aluno adiciona numeradores e denominadores, sendo que a ilustração apresentada não condiz ao resultado obtido.

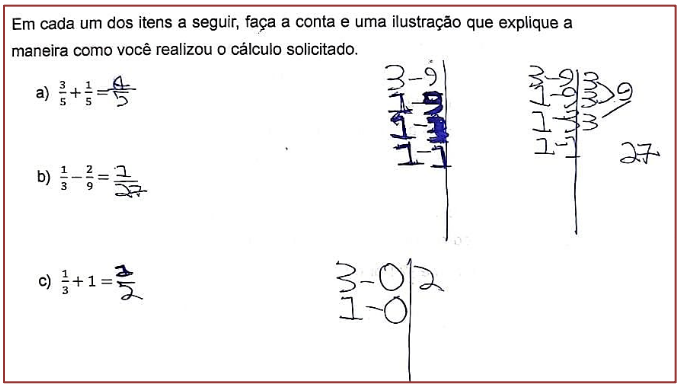
Figura 3 - Resposta do aluno à sexta questão



Fonte: Autoras (2024).

Um aluno mostrou o cálculo de Mínimo Múltiplo Comum (MMC), porém não realizou as equivalências das frações e chegou ao resultado $\frac{1}{27}$, conforme ilustra a Figura 4. Não houve resolução correta à letra (c).

Figura 4 – Resposta de aluno à sexta questão



Fonte: Autoras (2024).

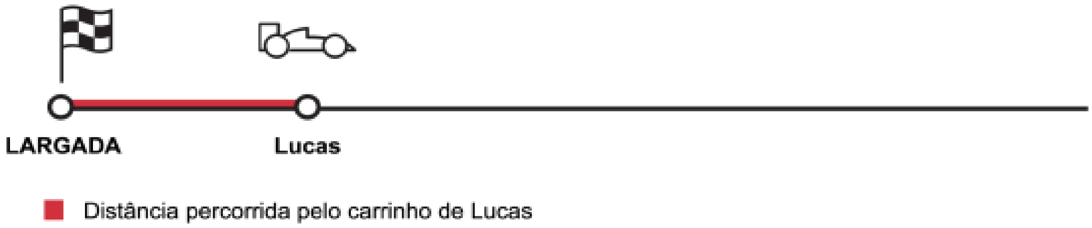
As questões no Quadro 3, abordam frações por meio de problemas.

Quadro 3 – Questões de 8 a 10 das análises prévias

8. Há três recipientes cilíndricos, de mesmo tamanho, contendo água. No primeiro recipiente, a água ocupa dois terços de sua capacidade. No segundo, a água ocupa metade de sua capacidade. No terceiro, a água ocupa cinco oitavos de sua capacidade. É possível redistribuir a água de todos os recipientes em somente um deles? Por quê?

9. Bianca, Carla e Denise são irmãos e comeram juntos uma pizza. Se Bianca comeu $\frac{3}{8}$ da pizza, Carla comeu $\frac{1}{4}$ da pizza e Denise comeu $\frac{1}{16}$ é correto afirmar que eles comeram toda a pizza? Caso tenha sobrado, qual fração da pizza sobrou?

10. Lucas, Matheus, Heitor, Rafael, Enzo, Nicolas, Lorenzo, Guilherme e Samuel estavam brincando de empurrar seus carrinhos de brinquedo para ver qual carrinho ia mais longe em uma pista reta. A figura a seguir mostra o quão longe foi o carrinho de Lucas e onde ele parou na pista com relação ao ponto de largada.



Sabe-se que:

- O carrinho de Matheus só conseguiu ir até a metade da distância percorrida pelo carrinho de Lucas.
- O carrinho de Heitor conseguiu ir até $\frac{3}{2}$ da distância percorrida pelo carrinho de Lucas.
- O carrinho de Rafael conseguiu ir até $\frac{4}{2}$ da distância percorrida pelo carrinho de Lucas.
- O carrinho de Enzo conseguiu ir até $\frac{5}{2}$ da distância percorrida pelo carrinho de Lucas.
- O carrinho de Nicolas conseguiu ir até $\frac{6}{2}$ da distância percorrida pelo carrinho de Lucas.
- O carrinho de Lorenzo conseguiu ir até $\frac{6}{4}$ da distância percorrida pelo carrinho de Lucas.
- O carrinho de Guilherme conseguiu ir até o dobro da distância percorrida pelo carrinho de Lucas.
- O carrinho de Samuel conseguiu ir até $\frac{6}{3}$ da distância percorrida pelo carrinho de Lucas.

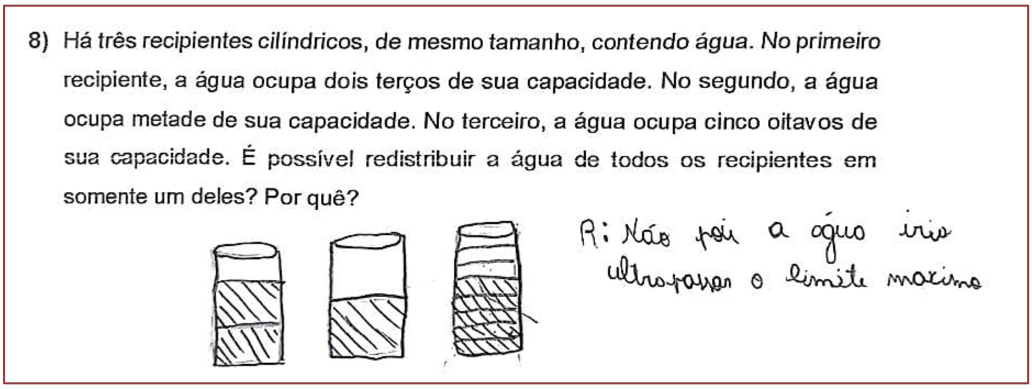
Com essas informações, marque as posições de parada dos carrinhos de todos os amigos de Lucas na figura a seguir.

Os carrinhos de Rafael e Samuel pararam no mesmo lugar? Explique.

Fonte: Autoras (2024).

Sete alunos não responderam à questão 8. Um aluno sinalizou o cálculo que deveria ser feito $\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{2}+\frac{5}{8}\right)$, todavia não resolveu. A Figura 5, mostra a resposta de um aluno usando ilustração.

Figura 5 – Resposta do aluno à oitava questão


8) *Há três recipientes cilíndricos, de mesmo tamanho, contendo água. No primeiro recipiente, a água ocupa dois terços de sua capacidade. No segundo, a água ocupa metade de sua capacidade. No terceiro, a água ocupa cinco oitavos de sua capacidade. É possível redistribuir a água de todos os recipientes em somente um deles? Por quê?*

R: Não poi a água iria ultrapasar o limite maximo

Fonte: Autoras (2024).

Na questão 9, evidenciam-se, novamente, dificuldades quanto a equivalência de frações, bem como na resolução da operação e interpretação do problema. Dois alunos responderam corretamente a última questão, ratificando problemas quanto à ordenação de números fracionários.

3.2. CONCEPÇÃO E ANÁLISE A PRIORI

Mediante as dificuldades observadas nas análises prévias, optou-se por trabalhar com o material manipulativo, com intuito de fortalecer a ideia de equivalência de frações, explicitar comparações com frações para generalizá-las e compreender as operações entre frações por meio das equivalências.

Foram desenvolvidas quatro atividades introdutórias, acerca da equivalência de frações, disponíveis em Magnaguagno (2024).

- Atividade 1: Introdução às frações circulares;
- Atividade 2: Representando a metade;
- Atividade 3: Comparando frações;
- Atividade 4: Frações equivalentes.

No Quadro 4, constam as duas atividades sobre adição de frações, adaptadas de Rodrigues (2016) e Jesus (2013).

Quadro 4 – Atividades propostas sobre adição de frações

1. Posicione as peças lado a lado e, em seguida, utilize as frações circulares para obter a soma como uma única fração. Coloque sua resposta na coluna *Resultado* na tabela a seguir. Anote em *Novo denominador* qual das frações circulares foi utilizada. Em seguida, vamos calcular o MMC dos denominadores das parcelas da soma e comparar com o novo denominador.

Operação	Resultado	Novo denominador	MMC dos denominadores
$\frac{1}{2}+\frac{1}{5}=$			
$\frac{1}{2}+\frac{1}{8}=$			
$\frac{2}{3}+\frac{1}{5}=$			
$\frac{3}{4}+\frac{1}{3}=$			

2. O que você pode perceber ao comparar o MMC dos denominadores das parcelas da adição com o novo denominador?

3. Utilizando frações equivalentes, reescreva as parcelas das adições utilizando o novo denominador, ilustrando por que o resultado encontrado nos testes é verdadeiro.

a) $\frac{1}{2}+\frac{1}{5}=$

b) $\frac{1}{2}+\frac{1}{8}=$

c) $\frac{2}{3}+\frac{1}{5}=$

d) $\frac{3}{4}+\frac{1}{3}=$

4. Utilizando frações equivalentes e o MMC para obter o novo denominador, realize as seguintes operações:

a) $\frac{3}{10}+\frac{4}{5}=$

b) $\frac{1}{8}+\frac{1}{7}=$

c) $\frac{2}{5}+\frac{3}{4}=$

Fonte: Autoras (2024).

No Quadro 5, destacam-se as atividades referentes a operação de subtração.

Quadro 5 – Atividades propostas sobre subtração de frações

1. Posicione o subtraendo sobre o minuendo e, em seguida, utilize as frações circulares para obter a diferença como uma única fração. Coloque sua resposta na coluna *Resultado* na tabela a seguir. Anote em *Novo denominador* qual das frações circulares foi utilizada. Em seguida, vamos calcular o *MMC dos denominadores* das parcelas de cada subtração e comparar com o novo denominador.

Operação	Resultado	Novo denominador	MMC dos denominadores
$\frac{1}{2}-\frac{1}{5}=$			
$\frac{1}{2}-\frac{1}{8}=$			
$\frac{2}{3}-\frac{1}{5}=$			
$\frac{3}{4}-\frac{1}{3}=$			

2. O que você pode perceber ao comparar o MMC dos denominadores das parcelas da subtração com o novo denominador?

3. Utilizando a ideia de frações equivalentes, reescreva as parcelas de cada uma das subtrações utilizando o novo denominador, ilustrando por que o resultado encontrado nos testes é verdadeiro.

a) $\frac{1}{2}-\frac{1}{5}=$ c) $\frac{2}{3}-\frac{1}{5}=$

b) $\frac{1}{2}-\frac{1}{8}=$ d) $\frac{3}{4}-\frac{1}{3}=$

4. Utilizando frações equivalentes e o MMC para obter o novo denominador, realize as seguintes operações:

a) $\frac{5}{6}-\frac{2}{3}=$

b) $\frac{1}{3}-\frac{2}{9}=$

c) $2-\frac{1}{2}=$

Fonte: Autoras (2024).

3.3. EXPERIMENTAÇÃO

O processo de experimentação ocorreu mediante a aplicação da uma sequência de seis atividades, com o auxílio do material manipulativo. Neste processo, o papel do professor, além de elaborar as atividades, consistiu em mediá-las durante sua realização, enquanto as estratégias de resolução partiram dos alunos.

A aplicação iniciou com a entrega dos moldes impressos a serem recortados pelos alunos. Esta atividade teve duração de 90 minutos e o resultado final está ilustrado na Figura 6.

Figura 6 – Frações circulares no mural da sala

Fonte: Autoras (2024).

Na sequência, os alunos fizeram a identificação das frações representadas. Em cada fração dos círculos, os alunos deveriam anotar quanto representava $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\right)$. Neste momento, um aluno perguntou: “se, então, as quatro peças juntas formavam quatro quartos?”.

Os alunos realizaram as atividades envolvendo as operações de adição e subtração em grupos, cada um com quatro integrantes. A professora resolveu as primeiras questões com eles, utilizando as frações circulares, para que os alunos pudessem compreender como deveriam proceder. Imediatamente, os alunos perceberam que o novo denominador era igual ao MMC dos denominadores, conforme havia estudado no ano anterior. A professora fez a correção assim que eles finalizaram a tarefa. Na compilação da Figura 7, destacam-se alguns alunos realizando estas questões.

Figura 7 – Alunos realizando a atividade sobre frações

Fonte: Autoras (2024).

Os alunos logo perceberam que, para obter as frações equivalentes, bastava multiplicar numerador e denominador por um mesmo número. Um aluno comentou, neste momento, que com a explicação, e utilização do material, essas operações faziam mais sentido. De um modo geral, os alunos conseguiram realizar as atividades. Nesta abordagem, a professora não abordou os algoritmos da adição e subtração, direcionando-os à aplicação da ideia de frações equivalentes.

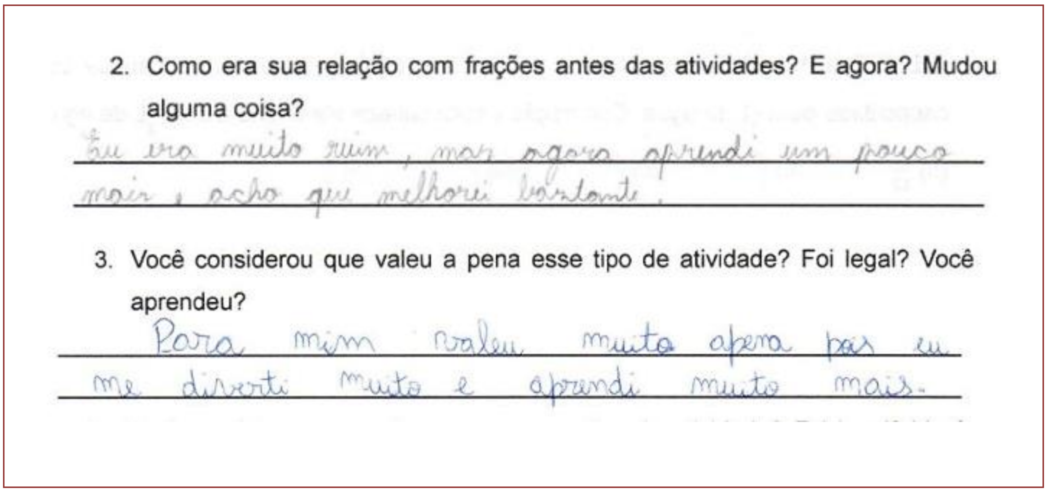
3.4. ANÁLISE A POSTERIORI E VALIDAÇÃO

Neste trabalho, a validação consistiu em um trabalho avaliativo e nas observações das atividades realizadas em aula. O trabalho avaliativo, por se tratar do encerramento da atividade, abordou questões envolvendo as operações de multiplicação e divisão de frações, as quais não constituíram o enfoque deste relato.

Notou-se, que tanto na realização de exercícios complementares, quanto no trabalho avaliativo, alguns alunos se equivocavam ao obter a fração equivalente, alterando somente o denominador. Entretanto, após a devolução do trabalho, a professora corrigiu tais questões e retomou a necessidade de multiplicar também o numerador para obter uma fração equivalente.

Os alunos, com essa justificativa, compreenderam os erros cometidos. Em um novo trabalho avaliativo de recuperação, os alunos tiveram uma melhora no desempenho. Ao final, os alunos deixaram sua opinião acerca da atividade. Na Figura 8, destacam-se a opinião de dois alunos.

Figura 8 – Retorno da opinião de dois alunos



2. Como era sua relação com frações antes das atividades? E agora? Mudou alguma coisa?

Eu era muito ruim, mas agora aprendi um pouco mais, acho que melhorei bastante.

3. Você considerou que valeu a pena esse tipo de atividade? Foi legal? Você aprendeu?

Para mim valeu muito apena pos eu me diverti muito e aprendi muito mais.

Fonte: Autoras (2024).

Destaca-se que, apesar de certa resistência em alguns momentos, os alunos conseguiram desenvolver sua autonomia na realização de problemas, e assim compreender o significado destas operações.

4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Salienta-se que os alunos foram capazes, em sua maioria, de evoluir gradativamente na compreensão das frações, seu significado e equivalências, para realizar a adição e a subtração de maneira significativa.

A atividade sobre adição de frações se mostrou importante para que os alunos compreendessem o sentido de obter as frações equivalentes necessárias para adicionar frações com denominadores diferentes. Como as questões da atividade sobre subtração de frações eram similares às aplicadas na adição, os alunos não apresentaram dificuldades. Destaca-se que as atividades exigiam a autonomia dos alunos que, por sua vez, geraram desconforto inicial, porém a adaptação ocorreu, ocasionando aprendizado efetivo.

A professora não trabalhou com os alunos os algoritmos relacionados a tais operações, permitindo que os estudantes desenvolvessem o raciocínio e o senso crítico para realizar a operação utilizando as frações equivalentes. Apesar de um pouco de resistência dos discentes à metodologia utilizada, ao incentivá-los a saírem de suas zonas de conforto, que muitas vezes consiste na aplicação de técnicas sem compreensão do processo envolvido, a mesma mostrou-se positiva e efetiva para o desenvolvimento do conhecimento das operações das frações para a resolução de problemas.

REFERÊNCIAS

[1] ALMOULOUD, Saddo Ag. Fundamentos da didática da matemática. Curitiba-PR: Editora UFPR, 2010.

[2] ARTIGUE, Michelle; BRUN, Jean. Didáctica das matemáticas. Lisboa: Instituto Piaget, 1996.

[3] BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. 2018.

[4] CAMPOS, Tânia Maria Mendonça; RODRIGUES, Wilson Roberto. A idéia de unidade na construção do conceito do número racional. **REVEMAT: Revista Eletrônica de Educação Matemática**. Universidade Federal de Santa Cataria, UFSC, Florianópolis, SC, v2. 4, p. 68-93, 2007. Disponível em: <https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/12992>. Acesso em: 10 jan. 2024.

[5] FIORENTINI, Dario; LORENZATO, Sergio. **Investigação em Educação Matemática: percursos teóricos e metodológicos.** 3. ed. Campinas: Autores Associados, 2012.

[6] JESUS, Amanda Botega Masson de. **Uma proposta de ensino de frações voltada para a construção do conhecimento**. 2013. 71 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestrado Profissional em Matemática, Universidade Federal de Lavras, Lavras, 2013. Disponível em: https://sca.profmat-sbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=748&id2=27160. Acesso em: 20 dez. 2023.

[7] MAGNAGUAGNO, Camila Gasparin. **Uma Abordagem Para O Ensino De Frações Utilizando Material Manipulativo Baseada Nos Princípios Da Engenharia Didática**. 2024. 122 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestrado Profissional em Matemática, Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2024. Disponível em: https://sca.profmat-sbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=7537&id2=171056160. Acesso em: 08 ago. 2024.

[8] RIPOLL, CydaraCavedon *et al* (ed.). **Frações no Ensino Fundamental**. 2. ed. Rio de Janeiro: Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2017. 210 p. Disponível em: https://livroaberto.uniriotec.br/wp-content/uploads/sites/57/2023/08/fracao_livro_professor_impressao.pdf. Acesso em: 20 dez. 2023.

[9] RODRIGUES, Marta Rejane Reis. **O uso de material concreto para estimular a aprendizagem do conteúdo de frações numa turma da primeira série do ensino médio.** 2016. 28 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Universidade Federal do Vale do São Francisco, Juazeiro, 2016. Disponível em:

http://www.univasf.edu.br/~tcc/000007/000007a3.pdf. Acesso em: 20 dez. 2023.

[10] SMOLE, Kátia Stocco; DINIZ, Maria Ignez. **Materiais Manipulativos para o Ensino de Frações e Números Decimais** – Vol. 3: Coleção Mathemoteca. Penso Editora, 2016.

Capítulo 4

Letramento matemático: uma experiência em turma da EJA na cidade de Pedreiras-MA

Ana Raquel Soares Nunes
Mylena Silva Souza
Waléria de Jesus Barbosa Soares
Carlos André Bogéa Pereira

Resumo: A Educação de Jovens e Adultos (EJA) visa garantir uma educação para aqueles que perderam o processo de ensino de forma regular, seja por condições de vida, de trabalho ou qualquer fator que remeta seu desligamento da escola. Nesse contexto, é necessário refletir sobre a contribuição do ensino de matemática nessa modalidade de ensino. Apresentamos então, uma pesquisa caracterizada como estudo de caso, de cunho qualitativo, que teve como objetivo investigar o letramento matemático em uma turma da EJA do II segmento, do colégio Dr. Herschell Carvalho localizado na cidade de Pedreiras, estado do Maranhão. Buscamos responder o seguinte questionamento: como levar atividades contextualizadas no universo jovem/adulto pode contribuir para o ensino/aprendizagem da matemática na EJA? Pautada teoricamente em Campos (2023); Gomes e Bernard (2022); Silva (2017); e, D'Ambrósio (2001); a pesquisa teve como fontes a aplicação de atividades na turma investigada. Constatamos que o letramento matemático é ferramenta fundamental para o processo de aprendizagem matemática em turmas da EJA, porém muito há de se fazer para planejar atividades matemáticas que envolvam o contexto social dos alunos envolvidos nessa modalidade de ensino.

Palavras-chave: ensino da matemática, educação de jovens e adultos, letramento matemático.

1. INTRODUÇÃO

Proporcionar uma educação de qualidade para todos ainda é um grande desafio para boa parte das escolas que integram o sistema de ensino brasileiro. Toda a etapa da educação básica ainda possui um grande déficit para alcançar uma massa de estudantes nas mais variadas camadas sociais. No entanto, é preciso salientar que de todo o processo do ensino escolar, a Educação de Jovens e Adultos (EJA) é uma das modalidades que necessita de maior atenção, devido ao grande número de evasão escolar ocasionando perda significativa no desempenho do aluno no ensino e aprendizagem.

A EJA visar garantir uma educação para aqueles que perderam o processo de ensino de forma regular, seja por condições de vida, de trabalho ou qualquer fator que remeta seu desligamento da escola. Essas pessoas, boa parte com idade mais avançada, recorrem à EJA para concluir a educação básica.

Nesse aspecto, analisando a situação dessa modalidade, quanto aos aspectos sociais, econômicos e políticos de toda a comunidade escolar, precisamos entender toda a sistemática pedagógica utilizada pelos professores, seja na metodologia ou na didática, a fim de compreender como são repassados os conteúdos programáticos alinhados aos documentos curriculares voltado para EJA e assegurados pela LDB (Lei de Diretrizes e Base, N° 9394/1996), sobretudo, na área da matemática empregada em sala de aula, que diz que:

> Art. 37. A educação de jovens e adultos será destinada àqueles que não tiveram acesso ou continuidade de estudos nos ensinos fundamental e médio na idade própria e constituirá instrumento para a educação e a aprendizagem ao longo da vida.
>
> § 1º Os sistemas de ensino assegurarão gratuitamente aos jovens e aos adultos, que não puderam efetuar os estudos na idade regular, oportunidades educacionais apropriadas, consideradas as características do alunado, seus interesses, condições de vida e de trabalho, mediante cursos e exames.
>
> § 2º O Poder Público viabilizará e estimulará o acesso e a permanência do trabalhador na escola, mediante ações integradas e complementares entre si.
>
> § 3º A educação de jovens e adultos deverá articular-se, preferencialmente, com educação profissional, na forma do regulamento. (Brasil, 1996, p. 30-31).

Nesse contexto, há de refletir sobre como os componentes curriculares são ensinados na EJA para gerar aprendizagem. Um deles será tratado nesta pesquisa: a Matemática. Apresentamos uma reflexão que parte da ideia de que a matemática deve ser clara e concreta, de forma que haja o encontro entre os conteúdos programados e situações cotidianas dos estudantes da EJA. Propomos então um ensino pautado no letramento matemático.

O Letramento matemático tem assim a finalidade de envolver solução-problemas do cotidiano com habilidades na área da matemática, como por exemplo: a conta da dona de casa no supermercado, que pode ser trabalhado em sala durante as aulas sobre as quatro operações básicas.

Nesse contexto, a presente pesquisa buscou investigar o letramento matemático em uma turma com 22 alunos, da EJA-II segmento, 3ª etapa (6º/7º anos), para então, responder ao questionamento: como levar atividades contextualizadas no universo jovem/adulto pode contribuir para o ensino/aprendizagem da matemática na EJA? O estudo de caso teve como fontes de pesquisa a aplicação de atividades na sala investigada, pautadas em situações-problema do cotidiano de estudantes da EJA, como forma de avaliar o desempenho deles no que diz respeito ao estudo da matemática, associando os conteúdos programáticos da grade curricular às experiências adquiridas em âmbito social, garantindo que os discentes desenvolvessem caráter crítico e ativo, sabendo solucionar situações do dia a dia.

Estivemos amparados teoricamente por Campos (2023); Gomes e Bernard (2022); Silva (2017); e, D'Ambrósio (2001). Acreditamos que essa pesquisa, ao refletir sobre o letramento matemático no ensino de matemática da EJA contribuirá para a prática docente dos professores de matemática que trabalham nessa modalidade de ensino.

2. ALFABETIZAÇÃO MATEMÁTICA VERSUS LETRAMENTO MATEMÁTICO

Trabalhar com a matemática em sala de aula no dia a dia está muito além de apresenta resoluções de problemas ou uso das quatro operações básicas. Entende-se que existe uma necessidade nos indivíduos ao saber matemático que é encontrado no dia a dia e como aplicá-lo em situações problemas.

Ao entender a matemática fora das quatro paredes da sala de aula e compreender a sua importância dentro da sociedade, se faz necessário mencionar acerca do Letramento Matemático, que assim como o Letramento da língua portuguesa, trata-se de apresentar conhecimentos que ultrapassem a teoria e que permita o desenvolvimento das habilidades na prática da vida do estudante.

Na matemática, compreendemos que estar letrado matematicamente é conseguir aplicar os saberes matemáticos nas diferentes situações cotidianas, ou seja, é a interlocução entre os saberes escolarizados e os saberes vivenciais (Silva, 2017, p. 2). Isto é, a forma de aplicar conceitos matemáticos na vida prática e entendendo, como indivíduo ativo em sociedade, formas eficazes de solucionar problemas que nos são postos na vida cotidiana.

Ao tratarmos sobre Letramento Matemático, há de considerarmos uma significativa distinção quanto ao letramento e à alfabetização matemática. Os processos de alfabetização e letramento ocorrem simultaneamente, mas são de naturezas diferentes, pois envolvem conhecimentos, habilidades e competências específicas (Gomes; Bernard, 2022, p. 73).

Nesse sentido, comungamos com Gomes e Bernard (2022), e definimos que letramento matemático se trata da prática do conteúdo matemático na vivência do aluno, fora da escola, isto é, permite suprir as necessidades do indivíduo, nesse caso o aluno, no dia a dia com os problemas reais.

Para o PISA (Programa Internacional de Avaliação de Estudos), nos seus relatórios publicados pela OCDE (Organização para a cooperação e Desenvolvimento Econômico), diz o letramento matemático como:

> [...] a capacidade de um indivíduo para identificar e entender o papel que a matemática representa no mundo, fazer julgamentos e empregar a matemática de forma que satisfaçam as necessidades gerais do indivíduo

> e de sua vida futura como um cidadão construtivo, preocupado e reflexivo (Campos, 2023, p. 1750-1751, apud OCDE/Pisa, 2001, p. 41).

Para Arruda (2020), o letramento matemático pode incluir a conversão de conjuntos de problemas do mundo real em forma matemática (incluindo estruturação, conceituação e formulação de suposições ou modelos) ou interpretação ou avaliação de resultados matemáticos ou modelos matemáticos relacionados ao problema original.

Gonzales (2021), diz que um indivíduo é proficiente em matemática se puder aplicar suas habilidades e conhecimentos matemáticos para resolver problemas do mundo real. Portanto é necessário trazer a vivência dos alunos para a sala de aula, trazendo a ligação entre os dois mundos.

Enfatizamos que o conceito de alfabetização está arraigado a uma concepção de código e ao domínio de técnicas, que foram apresentando desdobramentos que estabeleceram alfabetização e letramento como processos distintos. Na matemática, é a partir da alfabetização que compreendemos a existência dos números, das formas e assim.

Podemos acreditar que a alfabetização matemática é o pontapé inicial para o letramento matemático do estudante, a base do conhecimento matemático. Desse modo é o encontro do aluno com a matemática (Gomes; Bernard, 2022), o primórdio do saber matemático, normalmente apresentado no início da educação escolar da criança.

3. LETRAMENTO MATEMÁTICO NA EJA

Quando tratamos de ensino para jovens e adultos que, por diversos motivos, estiveram longe da escola por determinado tempo, é necessário considerarmos o contexto no qual vivem. Portanto, no ensino de matemática, buscamos o letramento matemático como:

> [...] as competências e habilidades de raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente, de modo a favorecer o estabelecimento de conjecturas, a formulação e a resolução de problemas em uma variedade de contextos, utilizando conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas [...]. (Brasil, 2018 p. 266).

Para trabalharmos com a matemática em salas destinadas a esse público, o letramento matemático deve ser fator primordial para se alcançar a aprendizagem dos estudantes.

> [....] É também o letramento matemático que assegura aos alunos reconhecer que os conhecimentos matemáticos são fundamentais para a compreensão e a atuação no mundo e perceber o caráter de jogo intelectual da matemática, como aspecto que favorece o desenvolvimento do raciocínio lógico e crítico, estimula a investigação e pode ser prazeroso (fruição). (Brasil, 2018, p. 266).

Nessa perspectiva, o letramento matemático não se refere a apenas definições de conceitos matemáticos ou de situações irreais ou distantes da vida do estudante, ou é levado apenas por uma limitação na aplicação de formas ou métodos predefinidos, mas de levar a formação de um indivíduo crítico e consciente em sociedade.

A BNCC apresenta o uso do letramento matemático a partir das competências básicas para que o estudante desenvolva à longa de sua vida escolar, tais quais: Matemática como ciência viva e humana; desenvolvimento do raciocínio lógico; Compreensão dos diferentes campos da Matemática; observações de aspectos quantitativos e qualitativos; utilização de processos e ferramentas matemáticas; enfrentamento de situações-problema em múltiplos contextos; desenvolvimento de projetos solidários e diversos; interação com os pares de forma colaborativa.

O letramento matemático sendo uma exigência da BNCC, deverá ser desenvolvido em sala de aula, por isso vemos uma necessidade de formar o professor em relação não somente ao letramento matemático, mas também para tudo aquilo que a nova BNCC em Matemática traz (Jolandek, 2021).

O letramento matemático com ênfase na EJA, uma modalidade que ainda é precária em documentações e mesmo existindo há anos não foi abrangido pela BNCC. Ainda assim, tomamos o letramento definido na BNCC e definimos que na EJA, o ensino tem que abarcar o conhecimento pautado no cotidiano.

Também buscamos em outros autores, aportes que nos fizeram compreender como essa matemática associada ao cotidiano, enfatizada no letramento matemática, estava descrita.

Para Fonseca (2012) existe em uma sala da EJA uma diversidade de alunos com suas próprias identidades socioculturais, construídas da realidade desses indivíduos, e são a partir delas que o professor de matemática deve se assegurar para a boa aprendizagem desses alunos.

Deste modo, segundo D'Ambrósio (1996), o professor deve se preocupar com a forma de ensinar os seus alunos, de prepará-los para sociedade, pois o ensino vai muito além de uma sala de aula, existe uma educação para a cidadania. Essa concepção é retratada a partir da análise da construção cultural desse individuo através dos valores adquiridos por eles em sociedade (D'Ambrósio, 1996).

Outro aspecto defendido por D'Ambrósio (1966), para a educação matemática de forma qualificada é vigência de um currículo dinâmico para o professor de matemática que estejam atrelados as informações socioculturais dos alunos, pois a função do professor é participar diretamente da construção desse aluno para a sociedade.

Para Thees (2015), o conceito de ensino da matemática deve estar ligado ao entendimento do cotidiano, atendendo especialmente para pessoas jovens e adultas que tiveram acesso à educação básica que foi negada na idade esperada.

> com base nesse conceito, considera-se que o domínio do letramento matemático está relacionado com a capacidade do indivíduo em analisar, julgar e comunicar ideias, à medida que propõe, formula e resolve problemas matemáticos em diversas situações, pois a apropriação de um nível mínimo de letramento presume possibilidades de refletir acerca dos textos que circundam no cotidiano. (campos, 2023, p. 1751).

Ainda segundo Campos (2023), o ensino da matemática na EJA deve colocar a realidade como prioridade, partindo do seu convívio, família, ou seja, suas vivências, meio social, pois é um dos passos para tornar o ensino mais significativo com as informações com a realidade.

Para D'Ambrósio (2001), a vida cotidiana é repleta de saberes e práticas típicas da cultura. Em todos os momentos, os indivíduos utilizam ferramentas físicas e intelectuais específicas da sua cultura para comparar, classificar, quantificar, medir, interpretar, generalizar, inferir e, de alguma forma, avaliar.

Desta forma ao letramento matemático vem como um meio para que os alunos vejam que a conteúdo em sala é de grande serventia para vida cotidiana. Como exemplifica D'Ambrósio (2001), usar as compras diárias para ensinar matemática revela práticas aprendidas fora dos ambientes escolares que são verdadeiramente etnomatemática, e traz a observação crítica da realidade por meio de ferramentas de natureza matemática.

Acreditamos que o letramento matemático na EJA é uma ferramenta de grande importância para a formação dos alunos ali inseridos, pois é com esses métodos que os alunos podem ter melhor relação entre conteúdos aplicados em sala com sua vivência na sociedade.

4. NA SALA DE AULA DA EJA: ATIVIDADES QUE LETRAM MATEMATICAMENTE

Todas as atividades aqui apresentadas estiveram organizadas segundo o conteúdo administrado em sala pelo professor responsável e com base em problemas encontrados na rua, na casa, na loja, no mercado, para que os estudantes da EJA pudessem observar e entender que a matemática pode estar em seu cotidiano. As atividades foram realizadas entre os meses de outubro e novembro de 2023, período da pesquisa.

Teste 1: diagnóstico

Primeiramente aplicamos um teste diagnóstico com os alunos da turma investigada. A elaboração do teste diagnóstico aconteceu no dia 10 de outubro de 2023 e sua aplicação foi realizada no dia 11 de outubro de 2023.

O objetivo do teste diagnóstico consistiu em fazer um levantamento do nível de conhecimento dos alunos, visto que já havia indícios, por meio de falas informais do professor de matemática da turma, de que esse alunado encontrava-se com defasagem de aprendizagem, ou seja, mesmo estando na terceira etapa da EJA, muitos deles apresentavam um conhecimento de alunos da segunda etapa.

O teste foi composto por cinco questões: uma objetiva e quatros subjetivas.

No dia da aplicação estiveram presentes apenas seis alunos, os quais serão aqui designados por nomes fictícios. O teste consistia em situações-problemas relacionadas às situações do cotidiano dos alunos da EJA, envolvendo as quatros operações básicas.

A realização do teste diagnóstico se deu em dois horários e durante todo o período foi observado que: dos seis alunos em sala de aula, cinco tinham dificuldade em interpretar as questões ou diferenciar quando utilizar as operações de adição ou subtração; três alunas dos seis alunos apresentaram dificuldade em calcular uma subtração reserva, processo que envolve "pedir emprestada" uma parcela anterior ao valor anterior, seja uma unidade, dezena, centena ou outra ordem; quanto ao processo da utilização da operação de divisão cinco dos seis alunos demonstraram grande déficit na execução dos cálculos. Segundo Bessa (2007), as dificuldades podem estar relacionadas:

> Ao professor (metodologias e práticas pedagógicas), ao aluno (desinteresse pela disciplina), à escola (por não apresentar projetos que

> estimulem o aprendizado do aluno ou porque as condições físicas são insuficientes) ou à família (por não dar suporte e/ou não ter condições de ajudar o aluno). (Bessa, 2007, p. 4).

Apesar dos auxílios direcionados aos alunos para resolução do teste, foi observado a grande dificuldade que tiveram para resolver algumas questões, principalmente, aquelas que envolviam subtração ou divisão e até mesmo no processo de construção dos cálculos, uma vez que, confundiam a maneira de organizar os números por suas respectivas classes ou ordens numéricas.

Ainda sobre a aplicação do teste, foi observado que alguns alunos tinham dificuldade de associar o que se estava pedindo a alguma operação básica da matemática, além do déficit de separar o que seria uma conta de adição de uma conta de subtração e quando utilizá-las. No momento da realização da atividade, foi necessária uma ajuda mais direta com os alunos, auxiliando-os na leitura e intepretação de algumas questões do teste. Essa dificuldade se refere à falta de um trabalho com leitura e escrita nas aulas de matemática. Como diz Roedel (2016):

> A utilização da leitura nas aulas de matemática abre possibilidades ao professor de trabalhar diversos conteúdos de maneira contextualizada, ampla, e com uma linguagem mais fácil de ser entendida, ligando os conceitos matemáticos e a realidade, mostrando de forma prática a utilização da matemática na vida de cada um. (Roedel, 2016, p. 3).

Durante a resolução dos problemas, os alunos apresentaram um nível inferior ao que era esperado para alunos da etapa a qual estavam inseridos, o que reforça problemática apresentada pelo professor durante a etapa da entrevista, não sabendo identificar noções de totalidade para uma ideia de somatório ou entender que as diferenças de dois fatores estivessem ligadas a uma ideia de subtração. Assim, tomando como base o nível de dificuldade dos alunos com questões de matemática, foi fundamental demonstrar alguns exemplos práticos que estivessem associados ao uso das quatros operações básicas e desse modo, estimulá-los a direcionar os exemplos dado em sala de aula, com o que era pedido na questão.

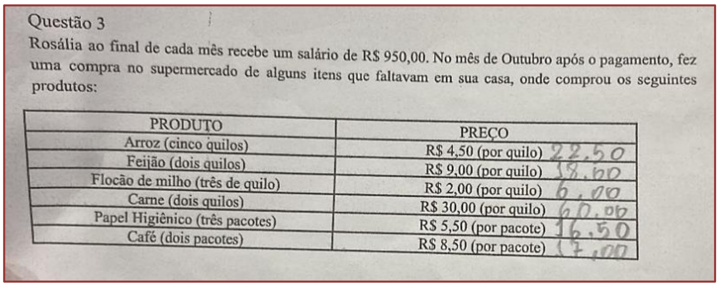
Das cinco questões apresentadas no teste, dois alunos conseguiram responder quatros questões, e outros três alunos, apenas duas questões. Também foi analisado que dos três alunos que acertaram apenas duas questões, dois não responderam outras duas questões, e um não respondeu uma.

Figura 1: Aplicação do teste diagnóstico

Fonte: autores, 2023.

Foi observado ainda que todos os alunos não conseguiram responder a terceira questão, que apresentava uma tabela de compras e levava os alunos a resolverem quanto o gasto e o valor final de uma compra.

Figura 2: Terceira questão do teste diagnóstico



Questão 3

Rosália ao final de cada mês recebe um salário de R$ 950,00. No mês de Outubro após o pagamento, fez uma compra no supermercado de alguns itens que faltavam em sua casa, onde comprou os seguintes produtos:

PRODUTO	PREÇO
Arroz (cinco quilos)	R$ 4,50 (por quilo) 22.50
Feijão (dois quilos)	R$ 9,00 (por quilo) 18.00
Flocão de milho (três de quilo)	R$ 2,00 (por quilo) 6.00
Carne (dois quilos)	R$ 30,00 (por quilo) 60.00
Papel Higiênico (três pacotes)	R$ 5,50 (por pacote) 16.50
Café (dois pacotes)	R$ 8,50 (por pacote) 17.00

Fonte: autores, 2023.

Ao final da aplicação do teste e da análise das respostas, notou-se a grande dificuldade dos alunos em resolver questões problemas que envolvessem as quatro operações básicas e que a construção de atividades com perguntas contextualizadas se faz uma tarefa complicada para esses alunos, pois como apresentaram dificuldade no ato da interpretação de texto, não conseguiam associar a situação-problema proposta a algum assunto da matemática.

Desse modo, se fez necessário a construção de mais atividades práticas que envolvam questões do contexto social dos alunos, trazendo a importância de se aprender matemática e de como pode ser trabalhada na vida, além de estimular o raciocínio e tornar os alunos da EJA mais críticos e ativos.

Realização das atividades

Atividade 1

Essa atividade que ocorreu no dia 16 de outubro de 2023, com a participação de cinco alunos. A primeira atividade da pesquisa consistia que os alunos analisassem folhetos de lojas, a fim de trabalhar a matemática entrelaçada com aspectos da matemática financeira do seu dia a dia. Nessa atividade, foi apresentado aos alunos um folheto de compras de uma loja, específica da cidade, e juntamente com ele um pequeno cartão com valores determinados por nós.

Apresentando o objetivo da atividade para a turma, foi realizado logo após a entrega dos folhetos juntamente com os cartões que continham cada um deles um valor específico, fazendo uma simulação de um cartão de crédito. Com o folheto e o cartão em mãos, cada aluno estava com um valor específico; cabe destacar, que as escolhas dos cartões não ocorreram por meio de sorteios ou escolha dos próprios alunos, mas determinadas por nós.

É preciso relatar que, inicialmente, era previsto para que alguns dos alunos ficassem com preços bem inferiores em comparação a outros, com intuito de trabalhar o pensamento reflexivo sobre a realidade social de pessoas que possuem menor ou maior poder financeiro, isto é, analisarem desigualdade social através do valor monetário. Essa análise crítica e reflexiva sobre a realidade dos alunos era uma das formas de aproximar a matemática à comunidade a qual esses indivíduos estão inseridos. Nesse sentido, concordamos com Rocha (2001), quando diz que:

> [...] o ensino de Matemática colabora para a nossa formação crítica e conclui que —[...] podemos entender e discutir economia e política, podemos perceber e questionar as injustiças, comparar as diferenças salariais, entender os índices e os gráficos veiculados na imprensa. Além disso, a Matemática pode nos auxiliar na tomada de decisões e no domínio da tecnologia. (Rocha, 2001, p. 28).

No entanto, a pequena demanda de alunos no dia da aplicação da atividade, (lembrando que ao ser apresentada a turma da terceira etapa existiam vinte e dois alunos matriculados), apenas cinco alunos, sendo quatro mulheres e um homem, onde especificadamente, dos cinco alunos duas eram adolescentes, fez com que revíssemos a atividade.

Assim, foi explicado para os alunos que os exercícios aconteceriam da seguinte maneira: cada aluno com seu cartão teria que escolher qualquer produto do folheto, de modo que a final, teriam que analisar o quanto gastaram e o quanto restou de dinheiro com a compra. Essa análise ocorreria através de uma tabela construída por eles no caderno, o qual identificariam os produtos que compraram e o valor do objeto de compra.

É preciso fazer uma ressalva que nessa atividade todos os alunos tinham total e completa autonomia para escolher os produtos, não existia restrição quanto o valor ou quantidade do produto, assim eles estariam "livres" para comprar qualquer objeto de uma ou mais unidade.

Durante o processo de aplicação foram analisados os seguintes pontos: a seriedade dos alunos com a atividade, uma vez que, levaram em consideração que de fato estavam analisando produtos de venda para casa; a escolha da compra à vista, pois deduziam que seria a forma mais acessível para comprar e economizar o dinheiro atribuído a eles; e, a observação de que comprar apenas uma unidade de determinado produto seria mais acessível e daria mais possibilidade para uma variabilidade de mercadorias na compra.

Figura 3: Alunos analisando folhetos comerciais

Fonte: autores, 2023.

Nesse momento também foi analisado que de todos os alunos, dois apresentaram certo desinteresse, mas ainda sim participaram. Quanto à construção da tabela, não houve dúvidas, entretanto, ao final da construção, os alunos demonstraram certa dificuldade para calcular o valor total das compras pois ainda não conseguiam resolver o problema, além da dificuldade de organizar a conta, a partir do algoritmo.

Nessa ocasião, orientamos para que os alunos usassem o raciocínio lógico e tentassem buscar formas variadas de resolver o problema.

> Nesse sentido, um problema consiste na apresentação de situações abertas e interessantes que requerem do aluno motivação e empenho para procurar suas próprias respostas e, consequentemente, o seu próprio conhecimento. Por este meio, o aluno cria seus próprios métodos e estratégias para resolver os problemas, bem como utiliza conhecimentos prévios a fim de responder a situações diferentes (Pozo, 1998, apud Coelho; Francisco, 2014, p. 10).

Observamos assim que, enquanto alguns alunos usavam a ideia de agrupamento, isto é, faziam a operação de adição de duas em duas parcelas, ou de três em três, outros optaram por colocar todos os valores um abaixo do outro, já outros que apresentavam alguma dúvida houvesse a necessidade de apresentar algum exemplo no quadro.

Após a obtenção dos valores, como apresentado no início da atividade, os alunos tiveram que analisar o valor final que havia restado comparado ao valor designado a eles inicialmente. A partir da verificação dos resultados, dos cinco alunos, três conseguiram analisar o quanto gastou e o quanto sobrou de suas compras, analisando se o consumo havia sido consciente ou não. Quanto as outras duas alunas, uma apenas apresentou o preço gasto e outra somente os produtos escolhidos.

É de suma importância relatar que após a aplicação da atividade, uma das alunas conseguiu perceber que o valor restante de suas compras ainda seria o suficiente para comprar mais um eletrodoméstico do folheto; já outro aluno, mencionou ao final da atividade, que o exercício aplicado em sala de aula era similar ao que era apresentado a ele durante o curso de educação financeira que estudou.

Esses tipos de comentários fizeram com que percebêssemos que a prática em sala com os alunos não só os atraiu como trouxe incentivo para resolução do problema e que através dessa interligação com a realidade no qual estão inseridos, permitiu com que fossem ativos e reflexivos na resolução da atividade, haja vista que, consideraram o problema como uma situação que estivessem inseridos e assim tomassem uma atividade consciente e autônoma sobre o que lhe foi imposto.

Atividade 2

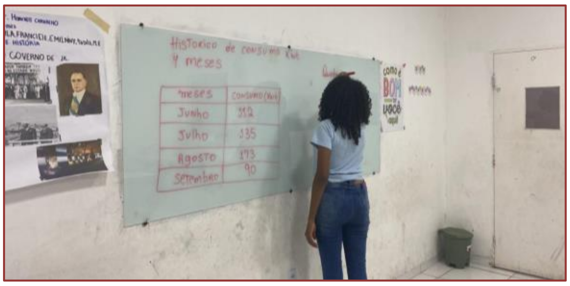
A atividade 2 foi realizada no dia 25 de outubro de 2023, contando com a participação de sete alunos em sala. Foi apresentada uma conta de energia, onde identificamos o valor da tarifa e a visualização do histórico do consumo de energia nos meses anteriores. Ao final, foi apresentado a eles uma proposta de construção de gráfico com meses e valores de consumo (kwh) fictícios. Cabe ressaltar, que o professor titular já havia iniciado o conteúdo de estatística, o que favoreceu para a compreensão na construção do gráfico que eles iriam fazer posteriormente. Mas para que houvesse maior compreensão, revisamos novamente sobre construção do gráfico, com um exemplo de supermercado, onde teria que colocar o nome dos alimentos e seus respectivos valores.

Dando continuidade, foi apresentado o objetivo da atividade para a turma, que era mostrar para que eles como o que significava as informações numa conta de energia, podendo ver seus gastos e consumos, como dito anteriormente.

Apresentamos uma tabela formada por meses (4 meses) e kwh de cada mês. Após a apresentação da tabela foram propostas três questões que envolviam a soma total dos kwh, qual mês gastou mais, quem gastou menos e uma com construção de gráfico de barra. Essa atividade buscou aproximar os alunos à sua realidade.

Os exercícios aconteceram da seguinte forma: cada aluno copiaria a tabela do quadro com as questões, onde deveriam responder os seguintes questionamentos: quais foram os meses que maior e menor consumo? Qual o consumo total de energia nos 4 meses? Construa o gráfico da tabela.

Figura 4: Exercício resolvido por aluno da EJA



Fonte: autores, 2023.

Na execução da atividade foi deixado que todos pensassem como resolveriam, mas como já mencionado anteriormente o nível de intepretação sobre qual operação utilizar ficou longe do ideal.

> [...] é necessário que o professor atenda os alunos em suas dificuldades, colocando-se como interventor e questionador. Acompanha suas explorações e ajuda-os, quando necessário, a resolver problemas secundários que podem surgir no decurso da resolução: notação;

> passagem da linguagem vernácula para a linguagem matemática; conceitos relacionados e técnicas operatórias; a fim de possibilitar a continuação do trabalho. (Onuchic, Allevato, 2011, p. 84).

Desta forma, resolvemos realizar uma leitura em conjunto, para que todos resolvessem a atividade, o que surtiu efeito.

É importante relatar que após a aplicação da atividade alguns dos alunos informaram que passariam a analisar o histórico das suas contas de energia, para poder comparar o consumo a cada mês e ver se podiam economizar nas próximas faturas.

Atividade 3

A atividade foi realizada no dia 01 de novembro de 2023, com um total de cinco alunos presentes. Foi apresentado como seria o desenvolvimento da atividade, que consistiu em observar os pesos de diferentes produtos descritos nas embalagens e fazer a comparação com os valores obtidos em uma balança.

Inicialmente foram apresentados alguns produtos alimentícios, para determinar se a quantidade deles seria um meio, um terço, ou outra medida. Logo após, orientamos os alunos onde deveriam encontrar o peso dos produtos nas embalagens. Posteriormente, eles pesaram todos os produtos e escreveram os valores mostrados pela balança.

Figura 5: Pesagem dos alimentos

Fontes: autores, 2023.

Ao encontrarem os valores da balança, foram orientados a criarem uma tabela com valores descritos na embalagem e valores encontrados na balança, para assim obterem a diferença entre os valores.

Desta atividade, foi observado que todos os alunos participaram e concluíram a proposta que inicialmente foi apresentada.

Essa atividade não era sobre erro ou acerto, mas sobre o impacto dela na vida dos alunos. No decorrer da atividade tiveram comentários sobre a atividade levantada pelos alunos, como: “usamos balança quando vamos fazer alguma receita”, “eu usava essa balança na casa da minha ex-patroa para pesar a alimentação dela”. Desta forma, vimos que a matemática está realmente englobada dentro das suas vidas e que é indispensável.

Atingimos o objetivo, pois os alunos destacaram que em seus futuros comportamentos verificariam o peso real e o indicado nas embalagens dos produtos consumidos por eles.

Teste 2

Na quarta e última etapa da pesquisa, realizada no dia 06 de novembro de 2023, após a execução das três atividades, ocorreu a aplicação do teste final, com intuito de avaliar o nível de aprendizagem dos alunos, isto é, verificar se eles tiveram uma melhora na hora de resolver problemas de matemática, a partir dos conteúdos trabalhados em sala nas atividades práticas.

A construção desse teste se deu no dia 04 de novembro de 2023, que foi composto de seis questões, sendo quatro subjetivas com cálculo e duas questões dissertativas, onde os alunos apresentariam suas opiniões acerca da pesquisa em sala, ou seja, as duas últimas questões serviriam como *feedback* para averiguar se o projeto realizado em sala fora benéfico ou não para esses alunos. No dia da aplicação do teste, participaram apenas quatros alunos, sendo eles: um homem e três mulheres.

O teste ocorreu em dois horários e nesse processo foi avaliado que: dos quatros alunos apenas uma aluna demonstrou bastante dificuldade para a resolução do teste, pois a mesma apresentava grande dificuldade para calcular operação básica, como por exemplo, cálculos envolvendo adição, uma vez que, não conseguia diferenciar noções de ganho ou perda ou até mesmo não sabia recorrer o uso da mão para resolver os cálculos (artifício utilizado para responder cálculos que envolvam operações de adição ou subtração), o que já havia sido avaliado nas etapas anteriores; os alunos demonstraram bastante entusiasmo para resolução das atividades, visto que, conseguiam associar os problemas que eram apresentados no teste com aquilo que havia sido abordado durante a execução das atividades.

Dos quatros alunos envolvidos na atividade, uma conseguiu responder todas as questões corretamente, dois erraram apenas uma alternativa de uma questão, e uma conseguiu responder apenas uma questão de cálculo. Durante toda a resolução do teste, é notório destacar que os alunos não apresentaram dificuldade em identificar as operações que deveriam ser utilizadas em cada questão e conseguiram diferenciar as operações básicas envolvidas.

Quanto ao método da resolução de cada aluno, observou-se que alguns recorreram ao uso do agrupamento de parcelas quando trabalhados com a adição, ou cálculos por partes quando envolvidas mais de uma operação, sempre levando em consideração a ordem das operações no cálculo.

Tomando como destaque a construção dos gráficos, os alunos apresentaram apenas dificuldade, em identificar em que eixo do gráfico ficaria cada grandeza envolvida no problema, mas em comparativo a formação do gráfico não tiveram problemas quanto a associação das grandezas.

Figura 6: Alunos da EJA respondendo o teste

Fonte: autores, 2023.

Partindo da análise dos cálculos para a averiguação dos alunos quanto à aprendizagem decorrida durante e após a execução das atividades realizadas em sala, desde o primeiro teste até o teste final, podemos destacar que houve uma significativa melhora na aprendizagem dos alunos.

Os alunos enfatizaram que existe uma grande dificuldade para aprender a matemática, porém as atividades realizadas em sala permitiram melhor compreensão de alguns conteúdos, principalmente, no uso das quatros operações básicas e até mesmo na construção dos gráficos. Além do mais, citaram que todo processo que ocorreu foi importante para aprendizagem deles, pois a forma de como era apresentado foi algo atrativo e que os estimulou para entenderem melhor o conteúdo matemático.

Destacamos que alguns alunos relataram a dificuldade na escrita e por essa razão não sabiam se expressar corretamente, porém citaram em sala que a maneira que foi apresentada os conteúdos de matemática através das atividades se tornou mais acessível para eles, pois verificavam a matemática a situações do dia a dia deles, além do mais, abordaram que essa maneira de apresentar a matemática de maneira "leve" é bem melhor que forma complicada que o professor de matemática, titular da turma, ensina em sala de aula.

Uma aluna, em específico, relatou que as atividades fizeram com que ela aprendesse cálculos básicos, que antes tinha vergonha de dizer que não sabia, com por exemplo, problemas que envolvem a divisão com valores pequenos; outra, por sua vez, mencionou que a forma calma que foi repassado o conteúdo de matemática fez ela melhorar nos cálculos e na intepretação do que era pedido em problemas, já que, segundo ela, o professor era impaciente e não sabia repassar de forma "acessível" o conteúdo.

Assim, com base na análise das respostas dos alunos, compreendemos a importância de levar o ensino de matemática de forma mais significativa aos alunos de modo que se sintam mais confortáveis em interagir com o problema apresentado, resolvendo-o.

Durante todo o período da prática com alunos, apesar de presenciar uma sala aula mista, com alunos de diferentes idades, diferentes saberes e com realidades de vida diferentes, as dificuldades foram as mesmas, a defasagem com a disciplina era praticamente a mesma. Porém, podemos destacar que todos os alunos, independente de idade, anseiam por uma matemática contextualizada a partir de suas vivências.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

A pesquisa, que consistia em um estudo de caso acerca de uma investigação sobre o letramento matemático em uma turma da EJA do colégio Dr. Herschell Carvalho em Pedreiras-MA, teve seus objetivos alcançados. Para tanto, destacamos que:

A pesquisa na turma aqui investigada permitiu avaliarmos a realidade dos alunos com relação ao ensino de matemática e de como o letramento matemático faz sentido em uma turma da EJA.

Foi notório observar que os alunos ingressos nessa modalidade, por inúmeros motivos que o deslocaram de um ensino regular, possuem um atraso na aprendizagem matemática para o segmento ou etapa o qual está inserido. Esse fato colabora para a necessidade de planejamento de um ensino que aproxime a sala de aula ao que ocorre no cotidiano desse aluno e, consequentemente, os conteúdos matemáticos precisam ser revistos nas metodologias docentes.

Outro ponto constado foi que os alunos quando postos às atividades que refletem a um modelo tradicional de ensino, no qual estão inseridos, sentem-se pressionados e entediados, pois os problemas não refletem o seu dia a dia. Mas quando comparamos às atividades práticas, em que os alunos se sentiram protagonistas da sua própria aprendizagem, observamos o interesse de todos.

Nesse sentido, devemos levar aos alunos da EJA, atividades de matemática que levem os alunos a trabalharem o raciocínio lógico, a criticidade e que intervenham no processo da resolução de problemas do seu contexto. É necessário fazermos com os alunos da EJA se sintam estimulados a cooperarem e apresentarem soluções para os problemas matemáticos apresentados, que os levam a compreender a importância de se aprender a matemática e de levar esses conhecimentos adquiridos para o âmbito social.

Esta pesquisa permitiu-nos compreender que não se deve anular o uso de atividades impressas, livros didáticos ou da utilização do pincel e quadro branco, mas devemos pensar na possibilidade de uma metodologia que envolva recursos associados aos problemas que trazem o dia a dia do aluno da EJA para a sala de aula. Dessa forma, os alunos da EJA compreenderão a importância da matemática para sociedade e construirão o saber matemático para as suas vidas.

REFERÊNCIAS

[1] ARRUDA, F. S. de; FERREIRA, R. dos S.; LACERDA, A. G. **Letramento Matemático:** Um olhar a partir das competências Matemáticas propostas na Base Nacional Comum Curricular do Ensino Fundamental. Ensino da Matemática em Debate, *[S. l.]*, v. 7, n. 2, p. 181–207, 2020. DOI: 10.23925/2358-4122.2020v7i2p156-179. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/index.php/emd/article/view/48745. Acesso em: 24 out. 2023.

[2] BRASIL. **Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional**, LDB. 9394/1996. BRASIL. P.31

[3] BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.

[4] BESSA, K. P. **Dificuldades de aprendizagem em matemática na percepção de professores e alunos do ensino fundamental.** Universidade Católica de Brasília, 2007.

[5] CAMPOS, E. L. F. **A relevância do letramento matemático na educação de jovens e adultos (EJA):** um estudo de caso. Revista Ibero-Americana de Humanidades, Ciências e Educação, *[S. l.]*, v. 9, n. 5, p. 1742–1768, 2023. DOI: 10.51891/rease.v9i5.9910. Disponível em: https://periodicorease.pro.br/rease/article/view/9910. Acesso em: 25 ago. 2023.

[6] COELHO, M. S. L. FRANCISCO, R. **Explorando metodologias de resolução de problemas em**

sala de aula para 6º ano. In: PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação. Superintendência de Educação. Os Desafios da Escola Pública Paranaense na Perspectiva do Professor PDE, 2014. Curitiba: SEED/PR., 2016. V.1. (Cadernos PDE).

[7] D'AMBRÓSIO, U. **Educação matemática: da teoria à prática**. 8. ed. Campinas, SP: Papirus, 1996.

[8] _______. **Etnomatemática: elo entre as tradições e a modernidade**. Belo Horizonte: Autêntica, 2001.

[9] FONSECA, M. da C. F. R. **Educação matemática de jovens e adultos**: **especificidades, desafios e contribuições**. 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2012.

[10] GOMES, J. M, BERNARD, I. L. S. **Alfabetizacão e letramento matemático:** falando da matemacia. Revista Paranaense de Educacao. Campo Mourão, PR, Brasil, v.11, n.26, p.66-82, set.-dez. 2022. DOI: https://doi.org/10.33871/22385800.2022.11.26.66-82.

[11] GONZALES, E.; AKEMI, L. *Vertentes sobre a modelagem matemática e o letramento matemático a partir de uma revisão bibliográfica.* **Educação Matemática Pesquisa***,* 23(2), 2021. pp. 218-244.

[12] JOLANDEK, E. G.; PEREIRA, A. L.; MENDES, L. O. R. **Letramento matemático e suas vertentes**. Revista Valore, Volta Redonda, 6 (Edição Especial): 563-573, 2021.

[13] ONUCHIC, L. R; ALLEVATO, N. S. G. Pesquisa em resolução de problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. **Bolema -** Mathematics Education Bulletin, v. 25, n. 41, p. 73-98, 2011.

[14] ROCHA, I. C. B. Ensino de matemática: formação para exclusão ou para cidadania? Revista da Sociedade Brasileira de Educação Matemática. **Educação Matemática em Revista**. Ano 8, n. 9-10, p. 22-31, 2001.

[15] ROEDEL, T. A importância da leitura e da literatura no ensino da matemática. **Encontro brasileiro de estudantes de pós-graduação em educação matemática**, v. 20, p. 1-8, 2016.

[16] SILVA, J. R. **Alfabetização e letramento matemático:** as lentes que o percebem. VII congresso internacional de ensino da matemática, p. 01-09, ULBRA – Canoas – Rio Grande do Sul – Brasil. 04, 05, 06 e 07 de outubro de 2017.

[17] THEES, A. **Práticas profissionais de professores de matemática da EJA**. 2. ed. Rio de Janeiro: Editora Unirio. 223 p., 2015.

Capítulo 5

Formação docente e ensino do Sistema de Numeração Decimal: reflexões a partir do Programa Residência Pedagógica

Adriana Camejo da Silva Aroma
Patricia Amaral Guerra Flois Moura

Resumo: Este trabalho se dedica a analisar a influência da imersão de licenciandos, em um projeto com características como o do Programa Residência Pedagógica (PRP) na constituição de saberes docentes para o ensino do Sistema de Numeração Decimal (SND) e suas características. Com base em estudos acerca dos saberes necessários à docência, e da aprendizagem do sistema de numeração nos anos iniciais da escolarização, delineou-se ideias teóricas basilares, ligadas ao ensino do SND. A experiência da docência, no âmbito das ações do PRP, por meio de uma abordagem metodológica inspirada em uma pesquisa-ação, provocou a reflexão acerca dos saberes necessários ao exercício da profissão, no contexto das aulas de matemática, no estudo do sistema de numeração.

Palavras-chave: formação docente inicial, Sistema de Numeração Decimal, Projeto Residência Pedagógica.

1. INTRODUÇÃO

A formação docente inicial deve considerar a natureza dos saberes que o exercício da profissão demanda, a fim de planejar e colocar em curso situações de aprendizagem potenciais para que os futuros professores avancem na construção desses saberes. Nessa trajetória, faz-se necessário adotar como base de conhecimento para o ensino algumas habilidades básicas, que se categorizadas em apenas duas vertentes: conhecimento do conteúdo e habilidades pedagógicas gerais, corremos o risco de ignorar a complexidade da ação docente, em um contexto escolar. Posto isso, e na intenção de escapar a essa redução, adotamos de Shulman (2014), as seguintes categorias do conhecimento para a docência: conhecimento do conteúdo, conhecimento pedagógico geral, conhecimento do currículo, conhecimento pedagógico do conteúdo, conhecimento de contextos educacionais e conhecimento dos fins, propósitos e valores da educação e de sua base histórica e filosófica.

Em paralelo a essa reflexão, cumpre ressaltar a possibilidade de cursos de formação inicial para a docência ingressarem em um projeto, denominado Programa Residência Pedagógica[1] (PRP) que tem por finalidade fomentar projetos institucionais de residência pedagógica implementados por Instituições de Ensino Superior, contribuindo para o aperfeiçoamento da formação inicial de professores da educação básica nos cursos de licenciatura (SEI CAPES, 2022, p.1), oportunidade concretizada em meados de 2022. Em estudo anterior, Silva e Tavares (2022) indicaram o papel e a importância do projeto ao longo da experiência de formação inicial para a docência. Os autores apontam aspectos de grande importância, entre os quais destacamos: a importância da formação docente alinhada à teoria e prática e o desenvolvimento de um olhar atento aos processos de aprendizagem e rendimento dos alunos da escola-campo.

Adotando como ponto de partida a reflexão de Silva e Tavares (2022), propusemo-nos a aprofundá-lo em contexto formativo similar, ou seja, a experiência de acompanhar, como coordenadora institucional do projeto e residente, um grupo de crianças, entre 7 e 9 anos de idade, alunos do terceiro ano do Ensino Fundamental, ao longo do ano letivo de 2023. Após algumas observações da residente, já incluída em sala de aula, constatou-se que as crianças reconheciam escritas numéricas de números do cotidiano, contudo, não interpretavam as relações quanto ao seu valor posicional.

Ao longo de inúmeras visitas à referida sala de aula, buscou-se descrever de forma detalhada os eventos ocorridos, compreender os desafios da professora regente e seus aprendizes para, então, contribuir com sugestões e ideias a fim de minimamente responder a alguns desafios da prática docente e da aprendizagem daqueles alunos. Dessa forma, adotamos o seguinte problema de pesquisa: "Qual a influência da imersão de estudantes de um curso de formação inicial para a docência, em um projeto com características como o do Programa Residência Pedagógica (PRP) na constituição de saberes docentes para o ensino do Sistema de Numeração Decimal (SND)[2] e suas características?

[1] Um programa do Ministério da Educação (MEC), que oferece bolsa de pesquisa para estudantes de licenciaturas em período final de formação de curso, financiado pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES).

[2] A sigla SND faz referência ao Sistema de Numeração Decimal, um sistema posicional, que utiliza dez algarismos (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) para representar números, agrupando com base na quantidade de dedos que temos nas mãos.

2. REFERENCIAL TEÓRICO

2.1. OS SABERES DA DOCÊNCIA NO CONTEXTO DO ENSINO DE MATEMÁTICA

A ação investigativa acerca do desenvolvimento profissional docente, considerando as especificidades do locus em que a pesquisa se deu, posto que amparada pela vivência no PRP, nos conduz ao desenvolvimento de uma argumentação relacionada à formação inicial do professor e a estruturação dos processos de ensino-aprendizagem da área estudada.

No âmbito do projeto, pretende-se transformar as experiências em conceitos analíticos e descritivos para que o professor em período de formação inicial possa construir conhecimento demandado para o ensino da área. Para a formação inicial de professores faz-se necessário discutir a diversidade nas produções de *knowledge base*, segundo Almeida e Biajone (2007), ao citar Shulman:

> Considerando que as pesquisas acerca do *knowledge* base tem como finalidade identificar um repertório de conhecimentos do ensino que serviriam para a elaboração de programas de formação de professores, a nossa intenção é discutir as implicações e repercussões dessas pesquisas para a formação inicial de professores [...] Segundo Shulman (2004), em ensino, *knowledge base* (base de conhecimento) é o corpo de compreensões, conhecimentos, habilidades e disposições de que um professor necessita para atuar efetivamente numa dada situação de ensino. (Almeida, Biajone, 2007, pp.283-4).

Na ação pedagógica é basilar que o professor conheça e domine o conteúdo que pretende ensinar aos alunos, para, a partir disso, elaborar estratégias adequadas e que promovam a aprendizagem com validação no desenvolvimento conceitual.

> O professor precisa entender não somente que algo é assim, mas também porque é assim, bem como em que pressupostos pode ele obter garantias e sob quais circunstâncias nossa crença na justificação (desses pressupostos) pode ser enfraquecida ou até mesmo negada. Além disso, nós esperamos que o professor entenda por que um dado tópico é particularmente central para uma disciplina enquanto um outro qualquer possa ser periférico". (Almeida, Biajone, 2007, p.288).

Colocando em ação conhecimentos dessa natureza, o professor pode vir a adaptar suas aulas e contextualizá-las de acordo com a necessidade que se apresenta na prática, validando elementos de suas estratégias para ensinar estudantes que aprendem de maneiras diferentes.

Para alcançar com êxito o conhecimento matemático do aluno é preciso buscar os conceitos que ele já construiu sobre os conteúdos e proporcionar novas possibilidades de desenvolver a aprendizagem. O professor tem o desafio constante de "tomar o [conteúdo] que já compreende e prepará-lo para um ensino eficaz" (Shulman, 2014, p.215) aos seus alunos.

A partir de uma ideia que inicie uma ação pedagógica – podendo ser um livro didático ou outro texto – é possível promover intenções educativas fundamentadas em métodos adequados para resultar em boas práticas pedagógicas na sala de aula. Esse ato de preparação para o fazer pedagógico é explicado por Shulman (2014) como sendo parte dos aspectos do raciocínio pedagógico. O autor propõe um modelo de processo de raciocínio, bem como de características básicas que explicam as ações e a elaboração pedagógica, seguido por um processo de reflexão lógica resultante em ações para o ato de ensinar e, a partir da reflexão recomeçar o processo.

O ciclo proposto pelo autor nos leva a considerar as ações do professor divididos em “antes-durante-depois” das aulas. Essas etapas dos aspectos do raciocínio pedagógico sintetizam, então, por um lado as atividades reflexivas prospectivas de uma aula, e por outro, as atividades retrospectivas, quando o professor termina sua aula e autoavalia sua execução e alcance dos propósitos educacionais.

O ponto de partida da ação docente se dá quando o professor considera os propósitos educacionais ligados ao tema/conteúdo a ser ensinado. Ao planejar a aula, o professor busca, então, alternativas didáticas para que seus alunos possam fazer uma alguma aproximação ao que será abordado. Ambos os momentos se referem diretamente às etapas de preparação das aulas, portanto, os consideramos momentos prospectivos da ação e do raciocínio pedagógicos.

Por outro lado, deve haver momentos retrospectivos da ação docente, que envolvem avaliação e reflexão acerca dos eventos da aula, que podem conduzir o docente a novas compreensões acerca do processo de ensino e de aprendizagem Shulman (2014).

A breve descrição dos diferentes momentos do trabalho docente acima apontados, pode ser traduzido em ações do ofício docente, compreendido desde o momento que antecede a aula, ou seja, quando o professor planeja sua ação, até o momento em que reflete sobre o que e como ocorreu, e se reorganiza.

2.2. O ENSINO DO SISTEMA DE NUMERAÇÃO NOS ANOS INICIAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL

A organização de nosso sistema de numeração decimal (SND) é estruturada por agrupamentos e reagrumentos – um recurso que o simplifica e torna dinâmico. No entanto, por outro lado, também o torna complexo aos olhos de uma criança em idade escolar.

A complexidade do sistema se dá em função de diferentes aspectos ligados a seu funcionamento. Ele apresenta apenas dez símbolos – 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9, a partir dos quais são construídos todos os números. O zero representa a ausência de quantidade, e presença de posição. O valor de cada símbolo é alterado de acordo com sua posição no número. Qualquer número pode ser representado usando o princípio aditivo (adição dos valores posicionais dos símbolos. Exemplo: 12 = 10 + 2), e também por meio do princípio multiplicativo (multiplicação do número pela potência de 10 correspondente a sua posição). Exemplo: 7 x 100 = 10 x (7 x 10). Os Princípios Aditivo e Multiplicativo geram a decomposição dos números. Exemplo: 345 = (3 x 100) + (4 x 10) + (5 x 1).

Em sua trajetória escolar, o aluno deve vir a considerar a existência de apenas dez símbolos, utilizados para registrar qualquer quantidade. A origem do funcionamento desses símbolos está no sistema de algarismo posicional indo-arábico. As pesquisadoras Lerner e Sadovsky (1996, p.74) explicam que “as crianças parecem, a princípio, não entender que os algoritmos convencionais estão baseados na organização de nosso sistema de numeração [decimal]”.

Mas, as crianças têm contato diário com o código numérico desde muito pequenas, afinal recebem diversos estímulos no convívio diário, ou seja, elas veem socialmente os algarismos em seus brinquedos, nos supermercados, em folhas de calendários, nas telas multimídias, em placas de automóveis e em, praticamente tudo ao seu redor, pois se consideramos as funções sociais dos números, observamos que eles cumprem dupla função: a primeira diz respeito a codificação, ou seja, nessas situações a função do número se aproxima da identificação, por exemplo, as placas de automóveis, ou os códigos em números de telefone.

A outra função que o número exerce se aproxima da ação de quantificar, e esta experiência primária e cotidiana com os números pode ser compreendida como um ponto de partida para a familiaridade com o universo aritmético, que será reformulado e sistematizado didaticamente no processo de ensino e aprendizagem de conteúdos matemáticos na escola. Sobre isto, as pesquisadoras Lerner e Sadovsky (1996) formularam as seguintes suposições:

> [...] as crianças elaboram critérios próprios para produzir representações numéricas e [...] a construção da notação convencional não segue a ordem da sequência (numérica), ainda que esta desempenhe um papel importante dessa construção. [...] Os dados que recolhemos mostraram uma alentadora coincidência com os obtidos no contexto da pesquisa que estão realizando Bressan, Rivas e Sheuer, e nos permitiram delinear o percurso das crianças. (Lerner, Sadovsky, 1996, pp.4,5).

O argumento descrito pelas autoras pode ser interpretado como um sentimento de correspondência entre as teorias. Afinal, ter acesso a dados acadêmicos que comprovem hipóteses a serem pesquisadas lança luz sobre o trabalho das conceituações relacionadas ao tema, pois se sustentam em informações baseadas em reflexões e produções acadêmicas relevantes para a área da educação, conferindo, desta forma, credibilidade.

Dessa forma, cabe aqui lembrarmos, os resultados da pesquisa de Lerner e Sadovisky (1996). As pesquisadoras apontam que para a tarefa de comparar números, as crianças consideram dois aspectos de forma simultânea: o valor do algarismo que ocupa a primeira posição, e a quantidade de algarismos de um determinado número.

As duas hipóteses, funcionando de maneira concomitante, correspondem às características do sistema, quando consideramos números até 99, posto que nesse intervalo numérico, todos os números apresentam a mesma quantidade de algarismos, e ao considerar o algarismo que ocupa a primeira posição, compara-se sempre a mesma ordem (no caso referindo-se a dezena).

No entanto, quando convidadas a comparar números que apresentam três algarismos, ou seja, números da ordem da centena, com outros que sejam da ordem da dezena, dúvidas podem ocorrer, pois as hipóteses entram em contradição. Na comparação entre 95 e 105, por exemplo. De acordo com a ideia de que o primeiro algarismo indica a magnitude, o 95 pode parecer o maior número. No entanto, 105 tem três algarismos. Nesse processo, as crianças podem fazer várias conjecturas, incluindo a ideia de que o 105 apresenta 0 intercalado, e nesse momento a ideia de que 0 indica apenas ausência de quantidade pode prevalecer.

Além da comparação de números, as pesquisadoras também indicam hipóteses infantis para a escrita de números. Nessa tarefa, as crianças apresentam escrita aditiva de números, de tal forma, que seus registros se aproximam da oralidade, pois neles aparecem todos os zeros, presentes na fala. Por exemplo: para 23 registram 203, para 68, registram 608, e assim sucessivamente.

De acordo com as pesquisadoras, tais tarefas, a de comparar e escrever números, compõem um dos eixos didáticos do trabalho de sala de aula. A orientação das autoras, no que se refere ao trabalho didático, é de que solicitemos às crianças que comparem e escrevam números cuja escrita convencional não foi "ensinada" previamente, pois apenas dessa forma pode-se colocar em ação as ideias das crianças, e discuti-las.

Um aluno que domina o SND está apto a compreender os princípios de contagens e medição, para, então, quantificar medidas e grandezas, e realizar operações de cálculo. Diversas atividades e ações intencionais devem ser planejadas pelo professor a fim de trabalhar as estruturas lógico-matemáticas dos alunos, além de habilidades de ordenar os números, de ler e escrever, de elaborar e comparar hipóteses. E, para tal, adotar o modelo proposto por Shulman (2014), ou seja, um ciclo que compreenda a compreensão, a transformação, a instrução, a avaliação e a reflexão." (Shulman, 2014, p.216).

Este caminho para alcançar os conhecimentos demandados pela docência, promovidos com intencionalidade pedagógica, pode representar uma longa trajetória individual. O desafio da docência será o de considerar ao mesmo tempo, tanto a complexidade do SND, quanto a possibilidade de cada criança estabelecer relações, em um processo contínuo de vir a compreender o funcionamento do sistema. Compreender como as crianças pensam e constroem as regras que regem esse sistema é fundamental para intervir corretamente com ações didático-pedagógicas e estratégias que estimulem o raciocínio lógico-matemático dos estudantes com base em suas experiências cotidianas concretas.

Esse tipo de raciocínio abre espaço para o estabelecimento de regularidades, que cada vez mais se aproximam de regras do sistema de numeração, e a partir disso, as crianças passam não apenas a perceber, mas a considerar e explicar ideias tais como "há dez números (de dois algarismos) que começam com um, dez que começam com dois, etc."

No âmbito da educação matemática, o modo que o professor ensina os conteúdos escolares revela a concepção e os valores que atribui ao ensino matemático, explicitando sua compreensão acerca da área, por meio da tríade "aluno-professor-saber matemático", defendido por Fiorentini (1994) como uma tendência pedagógica das representações sociais no Brasil e da multiplicidade presente no saber matemático.

Cada criança é única, aprende em seu próprio ritmo e desenvolve-se integralmente de acordo com suas especificidades e habilidades. Nesse contexto, a adoção de sequências didáticas como ferramenta pedagógica para oportunizar o aprendizado propõe um trabalho de constituição ritmado e organizado de forma crescente avançando nos conteúdos. Afinal, as intenções educativas do professor devem contribuir para o avanço e o desenvolvimento do aluno, ou seja, um aluno que não havia adquirido conhecimento significativo acerca de um determinado conteúdo, terá nova oportunidade de compreender em seu próprio tempo e raciocinar logicamente durante a execução de uma sequência didática.

3. PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Com a finalidade de orientar as ações desta pesquisa, optou-se por uma pesquisa-ação, pois contou com a participação ativa do pesquisador. A pesquisa-ação valoriza a atitude de professor investigador ao transformar a sala de aula em laboratório, na qual a reflexão na atuação, bem como a relação entre práticas e seus saberes, seja instrumento de avaliação de seu trabalho docente. Lüdke (2001), citando outros autores, explica que o método de pesquisa-ação está entre as melhores maneiras de atingir o processo de ensino e aprendizagem dos alunos.

> Ampliando a tradição fundada em Stenhouse, John Elliott, também na Inglaterra, desenvolve a *ideia* de pesquisa-ação, como aliada do trabalho e do crescimento profissional do professor, expandindo essa *idéia* para outros países, especialmente a Espanha, onde ela tem integrado planos de reforma do sistema educacional. (Lüdke, 2001, p.80).

A pesquisa-ação amplia a reflexão para a construção de um repertório próprio de saberes necessários para o exercício da docência, numa abordagem teórico-metodológica, dando voz ao pesquisador que irá atuar na área da educação.

Ainda na expectativa de analisar aspectos teóricos fundamentais na intenção de apresentar uma visão analítico-descritiva sobre os desafios da prática educativa no cotidiano escolar do professor pesquisador, a fim de melhorar as aprendizagens dos estudantes, o presente trabalho propõe, neste sentido, uma observação pragmática e pertinente ao problema da pesquisa, isto é, "Qual a influência da imersão em um projeto com características como as do Residência Pedagógica na constituição de saberes docentes para o ensino do Sistema de Numeração Decimal e suas características?". Durante todo o processo de confecção, pesquisa, execução, análise e conclusão foi possível refletir, por meio da prática em sala de aula, para discorrer e expor aspectos didáticos e pedagógicos no ensino de Matemática.

Após a implementação do PRP, seguiu-se um período de imersão na sala de aula na turma do 3º ano dos anos iniciais do Ensino Fundamental, na qual havia 22 alunos matriculados regularmente. Nos primeiros três meses, a residente apenas observou a turma e a professora em ação, passando gradualmente a interagir com a turma, orientada pela professora regente, denominada preceptora, de acordo com o edital número 24/2022 do Projeto Residência Pedagógica.

A fim de conhecer melhor os pontos de vista da preceptora, acerca das principais dificuldades de seus alunos com o SND, propusemos um encontro entre residente, professora orientadora e preceptora. A reunião ocorreu no dia 22 de maio de 2023 por meio da ferramenta digital *Google Meet* e teve a duração de 56 minutos. Naquela ocasião, ouviu-se as preocupações da preceptora referentes às defasagens de seus alunos e, então, optou-se pela construção de uma sequência didática para trabalhar algumas das questões apontadas durante a reunião. Após esse encontro, apresentamos a proposta de aplicação de uma sequência didática, de natureza investigativa, na qual fosse utilizada um material específico, as fichas sobrepostas[3].

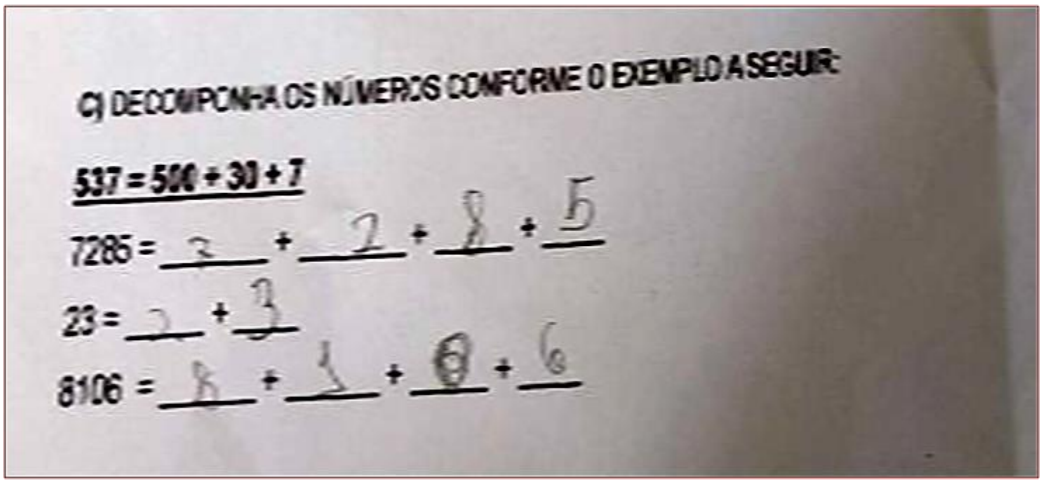
[3] O material "fichas sobrepostas" é composto por fichas numeradas de 0 a 9, que representam as unidades, fichas de 00 a 90, que representam as dezenas, fichas numeradas de 000 a 900, que representam as centenas, e fichas numeradas de 0000 a 10000, que representam os milhares. Para a aplicação da sequência didática confeccionamos cada grupo de fichas adotando-se cores distintas.

A sequência didática: “Sistema de Numeração Decimal utilizando fichas sobrepostas” foi aplicada em quatro aulas, de 8 a 16 de agosto de 2023, com duração de uma hora e quarenta minutos cada, na escola-campo. Ademais, para efeito de análise e descrição deste texto, adotamos um aspecto do SND: a posicionalidade, expressa na produção de algumas crianças, quando solicitadas a fazerem registros ligados aos valores absoluto e relativo de quantidades. Durante a aplicação das aulas os alunos foram desafiados a pensar e conversar sobre os números, divididos em pares, para utilizar as fichas sobrepostas em diferentes momentos e com múltiplas finalidades – tanto orais como de registro e escrita.

Atendendo aos procedimentos éticos adequados para uma pesquisa envolvendo seres humanos, o projeto foi submetido ao Comitê de Ética, e aprovado[4].

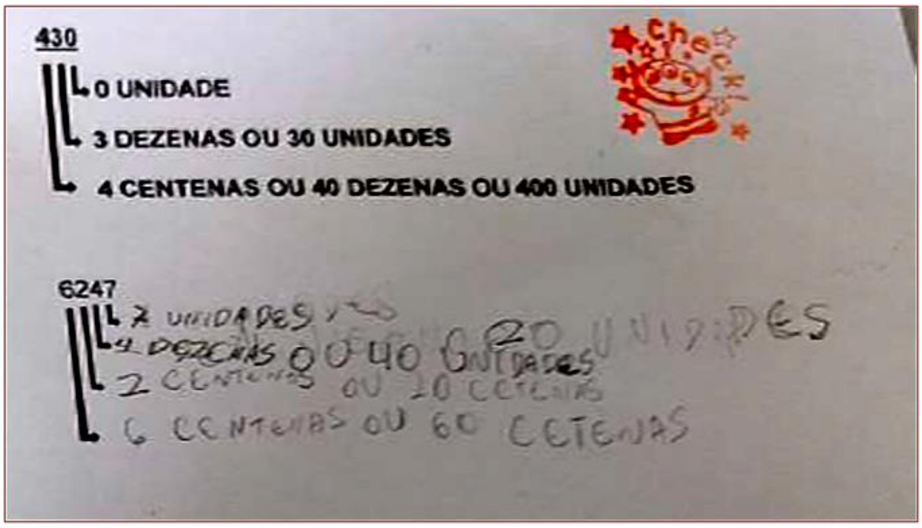
4. DESCRIÇÃO E ANÁLISE

Entre as ações planejadas e acordadas com a professora preceptora, figurou a realização de sondagens, elaboradas a partir de suas sugestões e análise de erros cometidos pelos alunos dessa turma, e para os quais a docente se mostrou inquieta. Dessas atividades selecionamos dois trechos, que expressam a referida inquietação.



Fonte: arquivo pessoal da aluna residente.

[4] Projeto aprovado pelo CEP/UPM sob n do CAAE 68083423.5.0000.0084



Fonte: arquivo pessoal da aluna residente

No primeiro exemplo, pede-se a decomposição de números, e se apresenta um exemplo: 537 = 500 + 30 + 7. Na sequência pede-se a decomposição de 7285, 23 e 8106, para as quais havia espaços reservados às quantidades em unidades, a serem registradas pelos alunos. No segundo exercício, apresentado na sequência, pedia-se a indicação de valores relativos, em todas as ordens, como se observa no exemplo: para 430, tem-se 3 dezenas, ou 30 unidades e 4 centenas, 40 dezenas ou 400 unidades.

Nos excertos acima temos resoluções apresentadas pelo mesmo aluno, que o fez no primeiro exercício sem manifestar dúvidas. No entanto, ao iniciar a resolução da segunda proposta, nos pareceu relutante, demorando-se mais do que o fez no exercício anterior. Mas, nesse momento, deixamos com que as crianças concluíssem seus registros sem muita interferência, uma vez que estávamos buscando seus saberes e dificuldades.

Todavia, cabe ainda frisar algumas considerações acerca das resoluções para as duas propostas. Na primeira, embora o exemplo apresente os valores em unidades para 537 (500 + 30 + 7), nos itens seguintes, a criança registra os valores absolutos, mesmo quando se pede a decomposição de uma quantidade menor (23). Já na segunda proposta, o registro da decomposição sugere que a criança fez algumas tentativas, tendo apagado e reescrito algumas delas, como é o caso do que deveria ser o espaço para a escrita de 4 dezenas, ou 40 unidades. Acima desse registro ainda se pode ler 20 unidades, o que nos sugere a decomposição da ordem das centenas, pois trata-se do número 6247, mas de forma equivocada, pois faz referência a 20 unidades, e não 200, como se esperaria da decomposição da quantidade em questão.

Isso posto, e como resultado da sondagem, consideramos que essa criança (assim como outras do mesmo grupo, que manifestaram equívocos similares), poderiam encontrar na manipulação das fichas sobrepostas, possibilidades de ampliar seu conhecimento acerca do tema, pois, por um lado, o material escolhido (fichas sobrepostas) demandam sobreposição de fichas, a fim de montar as quantidades, e por outro lado, não demandam registro escrito, o que poderia facilitar em casos como o descrito acima. Vejamos, agora, como essa criança se comporta na aplicação da sequência didática.

Organizados em duplas, fizemos a distribuição do material, e a exploração inicial, com o auxílio de registros variados na lousa. Na sequência, as duplas foram desafiadas a continuar a atividade de compor os números escritos na lousa, utilizando seus conjuntos de fichas sobrepostas. O primeiro número que as duplas deveriam formar era o 1346 (já trabalhado anteriormente na lousa) com as fichas corretas. Orientei que as duplas deveriam trabalhar conjuntamente, revezando entre eles na montagem dos números com as fichas.

Enquanto todos trabalhavam na composição do número 1346, passamos a atentar para a dupla na qual estava inserida a criança que produziu os registros acima. Notamos que a dupla discordava entre as estratégias apresentadas para a composição solicitada. Um dos alunos apontou o problema: “Professora, ela pegou só fichas cor de rosa (equivalente às unidades), mas tinha que ficar tudo colorido, né?” Então percebi que a criança alvo de nossa atenção selecionara apenas os números 1, 3, 4 e 6 para a composição solicitada, arranjo do qual, discordava sua dupla.

Diante disso, questionou-se as crianças acerca da quantidade, em valor relativo, do número 6 e eles responderam espontaneamente: “Seis.” E na sequência seguimos com a pergunta: “Seis, o quê? Quanto vale esse número seis?” Ambos insistiram que valia seis sem se referirem à ordem e seu valor posicional do número seis como unidade. Então perguntamos sobre o número 4 e eles adotaram a mesma lógica, diante do que questionamos: “Então, 4 + 6 é igual a 46? Tem mesmo 46 unidades aqui?

Nesse momento a discordância entre os dois alunos que formavam a dupla se tornou bastante evidente. Enquanto um deles apontava que nesse caso seria necessário sobrepor a ficha 6 a ficha 40, a outra criança (para a qual atentávamos) discordava, argumentando que bastaria aproximar as fichas 4 e 6. Nesse momento, pedimos que ambos explicassem o que estavam considerando para a composição da quantidade 46.

Aguardamos alguns instantes para que a dupla buscasse um consenso, e depois disso, o aluno que observávamos trocou a ficha de 4 unidades pela ficha de 4 dezenas e, assim, sucessivamente as fichas da centena e do milhar foram substituindo as de unidades. Pedimos para que nos explicasse por que estava trocando essas fichas. “Antes estava tudo cor de rosa e agora está colorido” Questionamos: “Mas é só a cor que importa? E se eu tivesse feito todas essas fichas da mesma cor? Por exemplo, as unidades, dezenas, centenas e unidades de milhar seriam todas no papel branco? Como você explicaria que eu não vou poder usar as fichas da unidade para compor 1346 sem fazer referências as cores?”, perguntamos. Nesse momento, nenhuma das duas crianças conseguiu explicar o porquê fez a troca das fichas, mas não voltaram atrás a respeito de sua nova opinião. A partir dessa descrição, passamos a análise de aspectos ligados a formação para a docência, no contexto do desenrolar no PRP, no que diz respeito a aplicação da sequência didática, ora em tela.

A princípio, apoiados em Shulman (2014), podemos afirmar que a docência demanda saberes ligados ao conteúdo que será ensinado, mas também aqueles que sustentam o raciocínio pedagógico, para que o professor aborde o saber específico de tal forma que o aluno possa vir a se aproximar dele, a partir do que já sabe acerca do assunto, o que abarcaria diferentes momentos, ou seja, antes, durante e depois da aula. Nesse sentido, focalizamos as primeiras ações do PRP, as quais objetivaram a imersão de alunos licenciandos no cotidiano da escola, incluindo a sala de aula. Durante os primeiros meses do projeto, os residentes estiveram, de maneira efetiva, em sala de aula, o que significou a real oportunidade de observar um grupo de alunos, estudantes dos anos iniciais do Ensino Fundamental, e sua professora. Entre outros assuntos estudados, houve aulas que abordaram a análise de quantidades, considerando os valores posicionais do sistema de numeração.

Dessa observação sistemática emergiu o questionamento a respeito do que alguns alunos pensavam a respeito de quantidades, e de como poderiam vir a elaborar decomposições de base 10. Por um lado, apontamos a parceria entre alguns atores envolvidos, a professora regente da sala de aula, a professora orientadora do projeto, e a própria residente. Nesse sentido, e nos apoiando em Shulman (2014), consideramos a primeira fonte de conhecimento para o ensino citada pelo autor: a formação acadêmica nas áreas do conhecimento, o que aqui inclui o próprio sistema de numeração, e seu ensino. Entendemos que a construção do saber ligado aos valores relativos de cada algarismo em um número está na base não apenas das aprendizagens ligadas a numeração, mas também ao cálculo. Assim, proporcionar boas situações de aprendizagem para esse conteúdo significa investir em uma aprendizagem sólida e consistente na área de matemática.

Para isso, buscou-se alinhar o questionamento quanto aos erros cometidos por alguns alunos, com a professora regente. Nesse momento, se faz necessário consideramos a ação docente prospectiva, ou seja, a que antecede a aula, a partir dos objetivos de ensino, conforme anuncia Shulman (2014). Esse momento da ação docente é decisivo para a aprendizagem efetiva dos alunos, pois nele são analisados seus erros, e como expressam o que sabem. No caso analisado, a aluna residente já havia percebido a dificuldade de algumas crianças, mas para a ação docente, ainda restava decidir a melhor abordagem.

O trabalho conjunto de residente, professora regente e professora orientadora do projeto foi essencial para a escolha, que recaiu no uso das fichas sobrepostas, a partir da análise desse material. Uma vez demandando a sobreposição, supomos que havia a possibilidade de que as crianças percebessem grupos de 10, 100 e 1000, uma vez que os erros e dificuldades apresentados pelas crianças indicou que esse material poderia proporcionar algum avanço nesse sentido. Essa escolha se deu em função de suas características, ligadas principalmente a sobreposição de fichas para a composição de números, e nas intervenções que seriam possíveis.

Dessa forma, cabe destacar que o momento que antecedeu a aula não incluiu apenas a escolha do material, e sua confecção, mas também a decisão a respeito do que poderia ser perguntado, quais explicações poderiam ser solicitadas para os alunos, e em quais momentos da aula. Pode-se verificar, a partir dos registros da aula, aqui descritos, além de atenção para a produção do aluno, por parte da residente, sua preparação e planejamento para o questionamento aos alunos. Por exemplo, uma vez que a composição do número 1346, elaborada com fichas 1, 3, 4 e 6 foi alvo de discordância entre os alunos da dupla, a residente se aproxima, e lança mão da análise do que seria apenas a composição de dezenas mais unidades, nesse caso, 46. Vejamos a maneira como ela aborda a questão: “Então 4 + 6 é igual a 46? Tem mesmo 46 unidades aqui?”

Propor a adição das unidades, como uma forma de se apontar o erro na escolha das fichas para a composição do número foi um aspecto discutido ao longo não apenas da preparação da aula, mas, principalmente, nas oportunidades de discussão de análise na disciplina ligada ao ensino da área, no curso de formação inicial para a docência. Pensamos que essa questão, lançada à dupla, foi disparadora de novas observações por parte das crianças, e subsequente troca de fichas. Embora naquele momento os alunos envolvidos não conseguissem explicar a razão matemática para essa troca, mesmo quando interpelados acerca de suas cores, se recusam a manter o arranjo anterior.

Retomando a questão ligada a formação docente, considerando as proposições de Shulman (2014), enfatizamos alguns momentos da ação pedagógica, vivida no âmbito do PRP. No que concerne ao momento que antecede a aula, temos que o ensino demanda compreender ideias relativas ao conteúdo a ser ensinado, e possibilidades de representá-lo de tal forma que se ajuste às necessidades dos alunos. Para isso, além de dominar o conteúdo, se faz necessário que se conheça também o grupo de alunos, antecipando o que pode vir a ser dificultador da aprendizagem, ou não. E, uma vez vencidos tais aspectos, se faz imprescindível antecipar abordagens, perguntas, questões a serem apresentadas ao grupo de alunos.

Todas essas questões foram experimentadas pela aluna residente, que uma vez imersa na escola, e na sala de aula, foi convidada a refletir e propor situações de aprendizagem que pudessem vir a lançar luzes em algumas dificuldades daquele grupo de alunos. Esse desafio se localiza em uma interseção entre conteúdo e pedagogia, que se configura na capacidade que o professor deve ter em transformar o conteúdo em representações pedagogicamente adaptáveis às necessidades dos alunos. Essa é uma aprendizagem dificilmente conquistada teoricamente, pois demanda a prática, o cotidiano da sala de aula, o que apenas um projeto com as características do PRP pode proporcionar à formação docente.

5. CONSIDERAÇÕES

Inicialmente cumpre relembrar o problema de pesquisa que norteou a pesquisa, assim redigido: “Qual a influência da imersão de estudantes de um curso de formação inicial para a docência, em um projeto com características como o do Programa Residência Pedagógica, na constituição de saberes docentes para o ensino do Sistema de Numeração Decimal (SND) e suas características?

Alguns aspectos que determinaram os encaminhamentos da pesquisa aqui merecem destaque: a formação inicial para docência, de professores quer exercem a polivalência, ou seja, referimo-nos aos professores atuantes nos anos iniciais da escolarização, que ensinam várias áreas do conhecimento, valendo-se para isso de uma formação focalizada em processos de aprendizagem, sem que nela se adote o foco da especialização em uma determinada área, como ocorre na formação de docentes atuantes nos anos finais do Ensino Fundamental, e Ensino Médio. Se por um lado falta-lhes essa especialização, por outro temos a proposta de formação de um profissional apto para a docência dos anos iniciais da escolarização.

No que se refere a formação docente para o ensino da matemática nessa etapa da escolarização, considera-se essa uma importante área de estudo e pesquisa para a Educação Matemática, posto que busca iluminar os meandros da etapa de formação para a profissionalização de docentes, que atuarão de forma polivalente, nos anos iniciais. Para essa atuação convergem saberes construídos ao longo da própria trajetória de vida dos futuros professores, como é o caso do sistema de numeração decimal, temática dessa pesquisa, e também saberes ligados a qual didática se mostra eficaz para a aprendizagem de determinados alunos, ou seja, é preciso não apenas conhecer e dominar o conteúdo a ser ensinado, mas também conhecer os alunos, a escola, as possibilidades didáticas que poderão melhor expressar as ideias matemáticas, e ainda saberes que conduzem a prática, no calor da ação docente.

O simples delineamento de saberes necessários à docência já aponta muitos desafios, tanto para as licenciaturas, como para a pesquisa na área de Educação Matemática, que abarca a formação inicial para a docência. Ao focalizar o aspecto ligado a prática demandado pela formação, para o qual um projeto com as características do Residência Pedagógica busca responder, temos o impacto que a pesquisa que busca examinar a imersão no PRP representa para a Educação Matemática.

Posto isso, cumpre ressaltar dois aspectos. O primeiro deles ligado ao impacto da imersão em um projeto com as características do PRP na formação inicial para a docência. Destaca-se a oportunidade ímpar de experimentar o contínuo processo de tomada de decisões, que caracteriza a docência. Desde o momento da observação dos alunos, seus erros e acertos, suas questões, suas falas e seus silêncios, passando pelo diálogo ininterrupto com professores mais experientes, e com o zelo pelo procedimento ético para dar vazão à pesquisa, até o momento de assumir a docência, e colocar em ação o plano, a fim de proporcionar uma boa situação de aprendizagem.

Por fim, o segundo aspecto, que nos lança ao duplo desafio de, por um lado, uma vez melhor compreendendo o processo formativo para a docência, seguir aprofundando a análise iniciada, a fim de explorar o processo de ensino da docência em outros temas pertinentes aos anos iniciais, e ainda nos inserirmos no debate acerca da formação inicial, que uma vez apoiada por projetos como o PRP poderá alcançar número mais expressivo de licenciandos.

REFERÊNCIAS

[1] ALMEIDA, Patrícia C. Albieri de; BIAJONI, Jefferson. *Saberes docentes e formação inicial de professores:* implicações e desafios para as propostas de formação. Educação e Pesquisa, v. 33, n.2, p. 281-295, 2007.

[2] BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília: MEC, 2018.

[3] BRASIL. *Pacto nacional pela alfabetização na idade certa:* formação de professores no pacto nacional pela alfabetização na idade certa. Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, Diretoria de Apoio à Gestão Educacional. - Brasília: MEC, SEB, 2012.

[4] LERNER, Delia; SADOVSKY, Patricia. *O sistema de numeração:* um problema didático. Porto Alegre: Editora Artmed, 1996.

[5] LÜDKE, M. *O professor, seu saber e sua pesquisa*. PUC-RIO, 2001.

[6] FIORENTINI, Dario. Alguns modos de ver e conceber o ensino da matemática no Brasil. Revista Zetetiké, Campinas, v. 3, n.1, p. 1-38, 1994.

[7] SEI CAPES, COORDENAÇÃO DE APERFEIÇOAMENTO DE PESSOAL DE NÍVEL SUPERIOR, PROGRAMA RESIDÊNCIA PEDAGÓGICA, CHAMADA PÚBLICA PARA APRESENTAÇÃO DE PROJETOS INSTITUCIONAIS. PROCESSO Nº 23038.003851/2022-04, Edital in: http://sei.capes.gov.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0. Acesso em: 10 mai 2023.

[8] SILVA, Paulo Fraga, TAVARES, Nubia P. Barbosa. *Estudo sobre o impacto do programa Residência Pedagógica na formação de licenciandos em Pedagogia: percepção dos residentes.* In: RABELO, Amanda O. MARCELO, Carlos, MONTEIRO, Ana Maria, REIS, Maria Amélia Gomes de Souza, MARTINEZ, Paula M (Orgs.) Programas de apoio ao professor iniciante em diferentes contextos. São Paulo: Editora Annablume, 2022.

[9] SHULMAN, Lee S. *Conhecimento e ensino: fundamentos para a nova reforma.* Cadernos Cenpec, Nova série, v. 4, n. 2, Dez 2014.

Capítulo 6

Tecnologias Digitais: a Matemática utilizada no funcionamento do Global Positioning System – GPS

Clovis Adilson Hauenstein
Igor Godoy Borges
Julius Kahoru Yassaki Filho
Valéria de Fátima Maciel Cardoso Brum

Resumo: O presente artigo trata da aplicação de uma sequência didática sobre o funcionamento de Tecnologias Digitais utilizando o funcionamento do *Global Positioning System* (GPS) e a as suas relações com a Matemática. Buscamos desenvolver uma atividade usando conceitos matemáticos relacionados a de Geometria Analítica, como distância entre dois pontos, equação da circunferência, sistemas de coordenadas no espaço, distância de dois pontos no espaço, esfera, sistema de triangulação das esferas e a Álgebra Linear por meio da Resolução de Sistemas Lineares, que estão presentes na BNCC, para explicar o funcionamento do GPS para alunos da 2ª série do Ensino Médio, no Colégio Estadual Coronel Pilar no município de Santa Maria, Rio Grande do Sul. As atividades foram desenvolvidas usando tecnologias digitais como o *GeoGebra*, *Scratch* e o *Google Earth*. Constatamos que com a aplicação da atividade foi possível aos alunos resgatarem habilidades trabalhadas em anos anteriores, além de aprenderem novos conceitos, desenvolvendo novas habilidades.

Palavras-chave: Tecnologias digitais, Sistemas de equações, *Geogebra*, *Scratch*, GPS.

1. INTRODUÇÃO

O desenvolvimento da aula onde o professor é o detentor do saber, cabendo ao aluno o papel de espectador, não desperta no aluno a curiosidade e o interesse pela aprendizagem. Assim, é fundamental ao professor , buscar alternativas para ensinar a Matemática, e uma delas é mostrar a funcionalidade e a aplicabilidade da Matemática em situações cotidianas.

Nesse sentido, surge esse estudo que trata da Matemática envolvida no funcionamento do GPS, com o objetivo de revisitar alguns conceitos matemáticos e introduzir novos, por meio das tecnologias digitais, mostrando uma aplicabilidade do estudo desses conceitos, contribuindo para a aprendizagem significativa dos alunos.

A aplicação da atividade na turma da 2ª série do Ensino Médio, se deve ao fato dela já possuir uma bagagem matemática interessante. Os conceitos matemáticos envolvidos desenvolvem habilidades relacionadas a Geometria Analítica e Álgebra Linear.

O objetivo deste trabalho é mostrar que o uso das tecnologias contribui significativamente para a compreensão e aprendizagem dos alunos, como observado em alguns trabalhos desenvolvidos por Araújo (2023), o qualpropõe o ensino de Geometria Espacial com a utilização do software Geogebra. O recurso surge como importante ferramenta pedagógica, auxiliando na visualização e compreensão dos elementos e medidas de figuras espaciais, e na compreensão de situações problemas. Já Castro (2017), desenvolveu em seu trabalho o uso da programação Scratch para o desenvolvimento de habilidades em crianças do ensino fundamental que obteve o resultado que comprova o aumento da autonomia, postura crítica e colaborativa dos estudantes, ratificando as ideias de Piaget e Papert, de uma educação motivadora e prazerosa para as crianças. Assim, os trabalhos desenvolvidos contribuíram para o desenvolvimento dessa proposta.

No que segue, apresentamos uma breve descrição sobre o Scrath, o GPS e os principais conceitos matemáticos envolvidos, e em seguida, descrevemos a metodologia utilizada neste estudo. Após, apresentamos os resultados obtidos e as considerações finais.

2. AS TECNOLOGIAS DIGITAIS NO ENSINO DA MATEMÁTICA

As tecnologias digitais são uma importante ferramenta no ensino. Na BNCC são abordadas as competências gerais da Educação Básica, entre elas:

> Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva. (BNCC,2017, p. 9).

Nesse sentido, o uso de softwares como Scrath e o GeoGebra, são facilitadores no processo de ensino e aprendizagem dos alunos. Assim, por meio desses recursos, aliados ao Google Earth, propomos essa atividade para que o aluno compreenda, crie e utilize as tecnologias para produzir conhecimentos, nesse caso que compreenda o funcionamento do GPS e a Matemática envolvida no processo.

Em seguida apresentamos algumas características dos softwares Scrath e o GeoGebra, finalizando com a explicação do funcionamento do GPS.

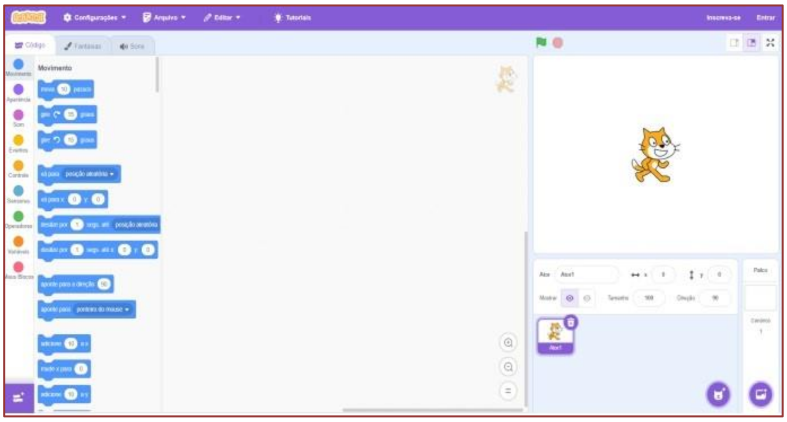
2.1. SOBRE O SCRATCH

O Scratch é uma ferramenta que aborda a programação computacional de forma lúdica e interativa, fornece ferramentas práticas para construção do pensamento computacional que pode ser aplicada em todas as modalidades de ensino.

Desenvolvido no Massachusetts Institute of Technology – MIT pelo Lifelong Kindergarten, o Scratch é baseado na linguagemLogo com objetivo de desenvolver nas crianças o pensamento computacional e a ideia de programação.

O software tem aplicabilidade nas mais variadas áreas podendo ser usado para o desenvolvimento de diversas competências.

Figura 1- Tela inicial do Scratch



Fonte: Elaborada pelos autores.

Na área de Matemática, o Scratch, pode transcrever uma grande quantidade de modelos matemáticos em uma linguagem sistemática de forma simples e lúdica.O Scratch, contém um espaço com as mais variadas operações e funções aplicáveis ao ensino de Matemática. Inicialmente a figura de um gato é apresentado como o ator, que segundo o programa é quem interage com o usuário. O ator está situado num palco que é referenciado com base em coordenadas cartesianas, onde o ator pode locomover-se de acordo com ângulos, coordenadas ou até equações definidas pelo usuário do programa.

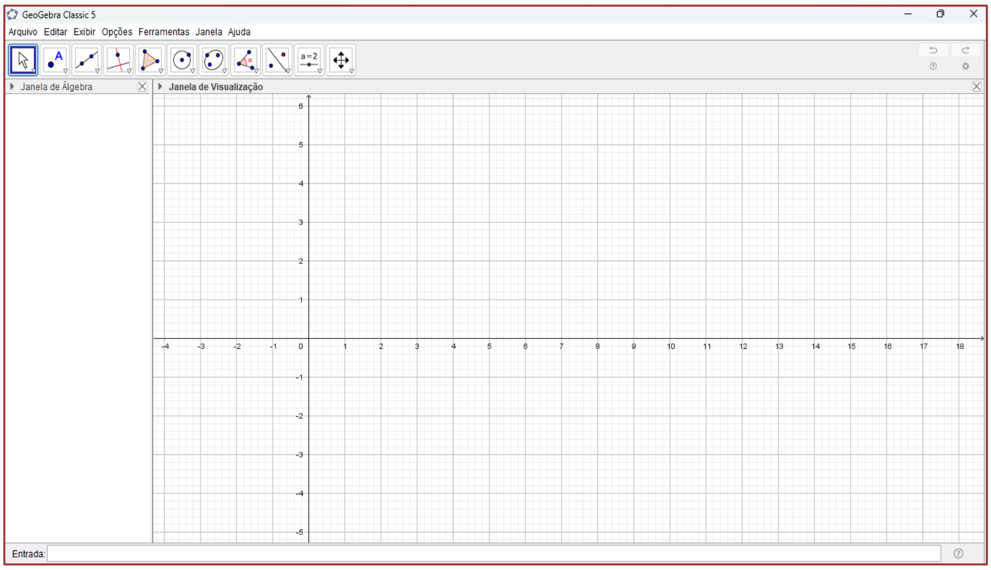
Posteriormente, será apresentado uma aplicação prática em sala de aula utilizando o Scratch em conjunto com o Google Maps para encontrar coordenadas geográficas através de coordenadas cartesianas.

2.2. SOBRE O GEOGEBRA

O GeoGebra é um aplicativo computacional livre de Matemática dinâmica que combina conceitos de Geometria e Álgebra,

O software foi criado para ser utilizado em sala de aula, ao combinar geometria e álgebra, torna-se uma importante ferramenta para o auxílio da compreensão e aprendizagem dos alunos. Na Figura abaixo apresentamos um registro da tela inicial.

Figura 2- Tela inicial do Geogebra



Fonte: Elaborada pelos autores.

Como observamos na figura acima, o software apresenta diferentes recursos que podem ser amplamente explorados por professores e alunos. O uso da ferramenta possibilita ao aluno o papel de protagonista, pois permite manipular e realizar suas próprias construções, ao professor cabe mediar o processo.

Um recurso importante é a construção de figuras em 3D, o que facilita ao aluno a visualização. Do mesmo modo, para o professor a ferramenta auxilia no planejamento de suas aulas, tornando-as mais dinâmicas e interativas. Nesse sentido, usamos o recurso mais adiante no nosso estudo, ao tratarmos da Matemática envolvida no funcionamento do GPS.

2.3. SOBRE O GPS

O GPS (Global Positioning System) surge quando os Estados Unidos buscavam uma tecnologia que permitisse rastrear e localizar suas forças militares em qualquer lugar do mundo. O desenvolvimento do GPS começou na década de 1960, com o projeto NAVSTAR (Navigation System with Timing and Ranging), liderado pelo Departamento de Defesa dos Estados Unidos.

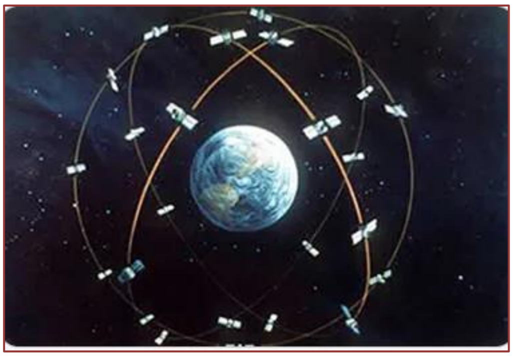
O objetivo era criar um sistema de posicionamento global que permitisse às forças militares determinar com precisão a localização de seus navios, aeronaves e tropas terrestres em qualquer parte do mundo. Os primeiros satélites foram lançados em 1978, apenas de forma experimental. No início da década de 1980, foram lançados novos satélites, e o sistema GPS começou a ser formado.

Embora, inicialmente o GPS era de uso restrito dos militares, em 1983 o sistema foi disponibilizado também para uso civil. O sistema foi sendo aprimorado, e avanços significativos ocorreram principalmente relativos à precisão, graças à técnica de correção diferencial. Essa técnica envolve o uso de receptores GPS adicionais em pontos de referência conhecidos para corrigir os erros causados por atrasos do sinal devido à atmosfera terrestre.

O sistema GPS é amplamente utilizado nos dias de hoje, principalmente na navegação veicular. A confiabilidade e sua precisão, permitem ao usuário localizar pontos de seu interesse, como hospitais, farmácias, escolas, supermercados, shoppings, restaurantes, pontos turísticos entre outros. Além de oferecer possibilidades de locomoção, a existência de aplicativos, de serviços de táxi por exemplo, que permitem mostrar o deslocamento em tempo real, garantido maior segurança ao usuário e o prestador de serviços.

O GPS funciona por meio de uma rede de 24 satélites que orbitam a Terra. transmitindo sinais para receptores em dispositivos como smartphones, carros e relógios, como apresentamos na Figura abaixo.

Figura3 - Órbita dos satélites



Fonte: Brasil Escola.

A idéia é que uma pessoa ou objeto em qualquer ponto da terra esteja ao alcance de pelo menos 4 satélites a qualquer momento, desta forma, com base nesses sinais, o GPS pode determinar a localização exata de um objeto ou pessoa em qualquer lugar do mundo.

No próximo capítulo, iremos apresentar dois conceitos matemáticos que estão relacionados com o funcionamento do GPS.

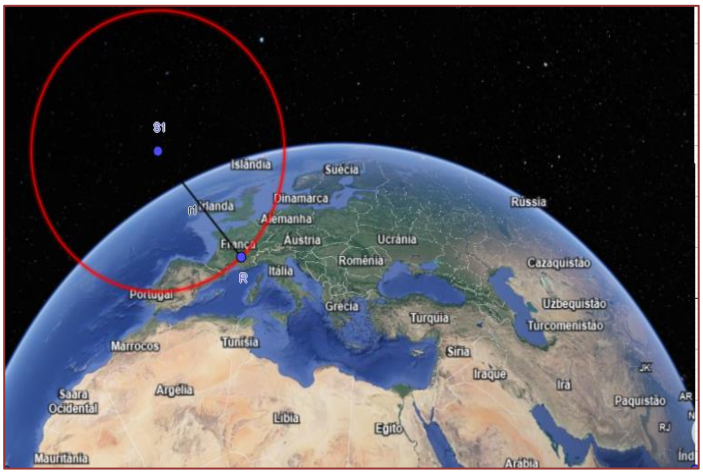
3. A MATEMÁTICA DO GPS

Nesse capítulo iremos apresentar alguns conceitos matemáticos importantes no que se refere a Matemática envolvida no funcionamento do GPS, a trilateração e a transformação das coordenadas cartesianas para coordenadas esféricas.

3.1. TRILATERAÇÃO

Inicialmente vamos exemplificar o sistema de trilateração para o caso bidimensional. Para isso consideremos um satélite S1 que está a uma distância r_1 do receptor. Traçamos a circunferência de raio r_1 com centro em S1, ou seja, o receptor está em qualquer ponto dessa circunferência como mostra a Figura abaixo:

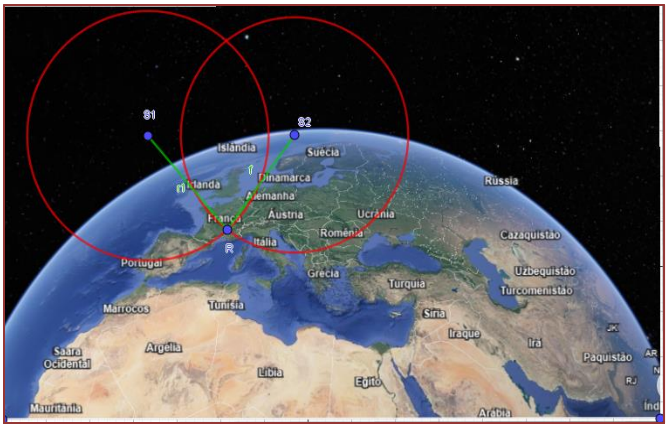
Figura 4 - Satélite do GPS 1



Fonte: Elaborada pelos autores.

Agora consideremos um satélite S2, que está a uma distância r_2 do receptor. Em seguida traçamos a circunferência de raio r_2, e centro S2. Conforme observamos na figura abaixo.

Figura 5 – Satélite do GPS 2



Fonte: Elaborada pelos autores.

Podemos observar na figura acima que agora temos 2 pontos de intersecção. Assim, basta tomarmos a superfície da terra, como uma terceira circunferência, ou seja, identificamos a localização do receptor, o ponto R, que pelo exemplo está na França.

De modo análogo, podemos ampliar esse resultado para o espaço. Para isso enunciamos um importante Teorema.

Teorema 1:*Se quatro superfícies esféricas se intersectam e seus centros são não coplanares, então essa intersecção consiste em um único ponto.*

Demonstração:

Dado$R \in \mathbb{R}$, $(R > 0)$, representamos uma superfície esférica S de centro $C = (q, r, s)$ e raio R pelo conjunto de pontos P tais que:

$$(x-q)^2 + (y-r)^2 + (z-s)^2 = R^2. \qquad (1.1)$$

A equação (1.1) é chamada de equação reduzida da superfície S que, quando desenvolvida, tem a forma:

$$x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0 \qquad (1.2)$$

Onde, a, b, c e d são números reais tais que $a = -2q$, $b = -2r$, $c = -2s$ e $d = q^2 + r^2 + s^2 - R^2$.

Assim, sejam S_1, S_2, S_3 e S_4 superfícies esféricas cujos centros são, respectivamente,

$$C_1 = (x_1, y_1, z_1),\ C_2 = (x_2, y_2, z_2), C_3(x_3, y_3, z_3) \text{ e } C_4(x_4, y_4, z_4).$$

As equações das superfícies esféricas S_1, S_2, S_3 e S_4 são dadas respectivamente por, (1), (2), (3) e (4), formam um sistema de equações que denominamos (1.1). Então precisamos mostrar que esse sistema possui solução única.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 & (1) \\ x^2 + y^2 + z^2 + a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 & (2) \\ x^2 + y^2 + z^2 + a_3x + b_3y + c_3z + d_3 = 0 & (3) \\ x^2 + y^2 + z^2 + a_4x + b_4y + c_4z + d_4 = 0 & (4) \end{cases} \qquad (1.3)$$

Por hipótese, a intersecção das superfícies esféricas S_i para $i = 1,2,3$ e 4 é um conjunto não-vazio e solução de (1.3)

Fazendo (1) – (2), (1) – (3) e (1) – (4), eliminamos os termos quadráticos e obtemos o sistema linear (1.4), cujas equações representam, respectivamente, os planos que contém as intersecções das superfícies esféricas S_2, S_3 e S_4 com S_1 e cuja solução é também solução do sistema (1.3).

$$\begin{cases} (a_1 - a_2)x + (b_1 - b_2)y + (c_1 - c_2)z + (d_1 - d_2) = 0 \\ (a_1 - a_3)x + (b_1 - b_3)y + (c_1 - c_3)z + (d_1 - d_3) = 0 \\ (a_1 - a_4)x + (b_1 - b_4)y + (c_1 - c_4)z + (d_1 - d_4) = 0 \end{cases} \qquad (1.4)$$

O sistema acima terá solução única se:

$$\mathrm{D} = \begin{vmatrix} a_1 - a_2 & b_1 - b_2 & c_1 - c_2 \\ a_1 - a_3 & b_1 - b_3 & c_1 - c_3 \\ a_1 - a_4 & b_1 - b_4 & c_1 - c_4 \end{vmatrix} \neq 0.$$

De fato, comparando as equações (1.1) e (1.2), temos que $a_i = -2x_i$, $b_i = -2y_i$ e $c_i = -2z_i$, com $i = 1,2,3$ e 4 e assim:

$$\mathrm{D} = \begin{vmatrix} -2x_1 + 2x_2 & -2y_1 + 2y_2 & -2z_1 + 2z_2 \\ -2x_1 + 2x_3 & -2y_1 + 2y_3 & -2z_1 + 2z_3 \\ -2x_1 + 2x_4 & -2y_1 + 2y_4 & -2z_1 + 2z_4 \end{vmatrix}$$

$$= 8. \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix}$$

$$= 8. \begin{vmatrix} C_2 - C_1 \\ C_3 - C_1 \\ C_4 - C_1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Assim, usando o fato de que os pontos A, B, C e D, em $\mathbb{R}^3$ são coplanares se, e somente se,

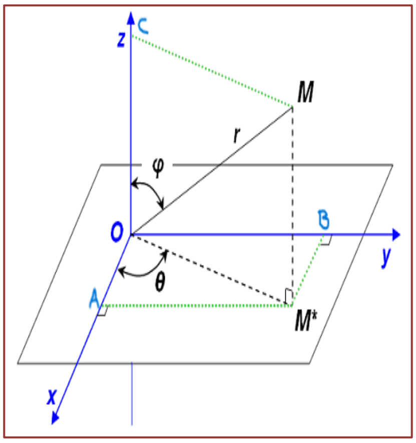
$$\begin{vmatrix} B - A \\ C - A \\ D - A \end{vmatrix} = 0$$

Logo, como obtemos D ≠ 0, os centros C_1, C_2, C_3 e C_4 são não coplanares e a intersecção é um único ponto.

3.2. TRANSFORMAÇÕES DE COORDENADAS CARTESIANAS PARA COORDENADAS ESFÉRICAS

Vamos transformar as coordenadas cartesianas de um ponto $P = (x, y, z)$ em coordenadas esféricas, $P = (\theta, \varphi, r)$. Para isso utilizaremos como base os dados da **Figura 6.**

Figura 6 – Mudança de coordenadas



Fonte: Wikipédia.

Sejam M um ponto qualquer, onde $\overline{OM} = r$, M* a projeção de M no plano xy, θ o ângulo entre $\overline{OA}$ e $\overline{OM^*}$ e φ o ângulo entre $\overline{OC}$ e $\overline{OM}$. Podemos deduzir $P = (\theta, \varphi, r)$ a partir das equações (1.5):

$$\begin{cases} x = r \operatorname{sen} \varphi \cos \theta \\ y = r \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta \\ z = r \cos \varphi \end{cases} \qquad (1.5)$$

Para encontrar a coordenada esférica r vamos calcular $x^2 + y^2 + z^2$, utilizando as equações de (1.5):

$$x^2 + y^2 + z^2 = (r \operatorname{sen} \varphi \cos \theta)^2 + (r \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta)^2 + (r \cos \varphi)^2$$

Podemos reescrever isolando $(r \operatorname{sen} \varphi)^2$, temos:

$$x^2 + y^2 + z^2 = (r \operatorname{sen} \varphi)^2((\cos \theta)^2 + (sen\theta)^2) + (r \cos \varphi)^2$$

Usando a identidade trigonométrica $sen^2\theta + cos^2\theta = 1$, obtemos:

$$x^2 + y^2 + z^2 = (r \operatorname{sen} \varphi)^2 + (r \cos \varphi)^2$$

Então

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2\big((\operatorname{sen} \varphi)^2 + (\cos \varphi^2)\big) = r^2$$

Ou seja,

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \qquad (1.6)$$

Do triângulo ΔOAM*, temos que:

$$\tan \theta = \frac{y}{x}$$

Ou seja,

$$\theta = \tan^{-1} \frac{y}{x} \qquad (1.7)$$

Do triângulo ΔOCM, temos que:

$$\cos \varphi = \frac{z}{r} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

Ou seja,

$$\varphi = \cos^{-1} \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \qquad (1.8)$$

Dessa forma ficou demonstrada a transformação de coordenadas cartesianas de um ponto no espaço tridimensional para coordenadas esféricas através das equações (1.6), (1.7) e (1.8).

$$\begin{cases} \theta = \tan^{-1}\frac{y}{x} \\ \varphi = \cos^{-1}\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \end{cases} \qquad (1.9)$$

Haverá, mais adiante, uma aplicação desse resultado utilizando o aplicativo Scratch com os alunos sujeitos dessa pesquisa.

4. METODOLOGIA E RESULTADOS

Neste capítulo iremos apresentar a metodologia utilizada para o desenvolvimento das atividades e de modo qualitativo, realizamos a avaliação dos resultados por meio dos registros dos alunos e as observações realizadas pelos pesquisadores. A atividade aplicada aos estudantes foi dividida em duas etapas.

4.1. ETAPA 1

Os alunos participaram de uma aula de 50 minutos na sala de vídeo da escola sobre os conceitos prévios que precisam ter para entender a matemática por trás do GPS, além entender como funciona o processo de triangulação e um pouco da história.

Para a implementação da aula na Etapa 1 foram elaborados dois materiais didáticos, o Material 1, com a finalidade de expor na televisão, mostrando os conceitos prévios de matemática, história do GPS e sobre o sistema de triangulação e o Material 2, material impresso que foi entregue aos alunos contando com um exemplo de como eram feitos os cálculos matemáticos pelo computador para localizar um elemento no GPS.

Os alunos demonstraram interesse, realizando observações e questionamentos importantes. A atividade possibilitou aos alunos reverem alguns conceitos matemáticos trabalhados em anos anteriores e ao mesmo tempo compreender outros.

Com o desenvolvimento inicial, no Material 2 apresentamos o Exemplo 1, para exemplificar aos alunos o funcionamento do GPS.

Exemplo 1: Considere a Terra, uma esfera com centro na origem e raio 1. Determine as coordenadas cartesianas e esféricas do ponto R e localize no Google Earth a região onde o receptor se encontra, dados:

- R = (x,y,z,) um ponto receptor na Terra do sinal dos satélites A, B, C e D.
- As coordenadas cartesianas dos satélites A = (2,2,2), B = (-1,1,2), C = (-2, -1, -2) e D = (1,-2,-2).

Distância AR = 2.68, BR = 2.58, CR = 3.78 e DR = 3.44

Resolução:

Consideremos a esfera com centro na origem e raio 1. A equação dessa circunferência é dada pela equação $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Como R é o receptor do sinal, e está localizado em algum ponto da Terra, determinamos as equações das circunferências com centro no satélite e raio igual a distância do satélite até o ponto R, obtendo:

- $S_A = (x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = (2.69)^2$
- $S_B = (x+1)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = (2.58)^2$
- $S_C = (x+2)^2 + (y+1)^2 + (z+2)^2 = (3.78)^2$
- $S_D = (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z+2)^2 = (3.445)^2$

Pelo Teorema 1, se quatro superfícies esféricas se intersectam e seus centros são não coplanares, então essa intersecção consiste em um único ponto, no caso R. Assim, desenvolvendo cada equação obtemos:

- $S_A = x^2 - 4x + 4 + y^2 - 4y + 4 + z^2 - 4z + 4 = 7.2$ (1)
- $S_B = x^2 + 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 + z^2 - 4z + 4 = 6.65$ (2)
- $S_C = x^2 + 4x + 4 + y^2 + 2y + 1 + z^2 + 4z + 4 = 14.29$ (3)
- $S_D = x^2 - 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 + z^2 + 4z + 4 = 11.86$ (4)

Subtraindo a equação (4) de (1), (2) e (3), obtemos, respectivamente:

- $2x + 8y + 8z = 7.66$
- $-4x + 6y + 8z = 2.21$
- $-6x + 2y = -2.43$

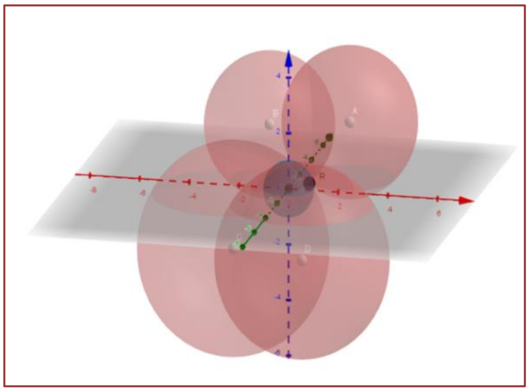
Escalonando a matriz ampliada do sistema (Usando o Método de Gauss- Jordan) obtemos:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 4 & {}^{383}/_{10} \\ 0 & 1 & {}^{12}/_{11} & {}^{3506}/_{4400} \\ 0 & 0 & 1 & 0{,}04 \end{array}\right)$$

Donde obtemos, $z = 0{,}04$, $y = 0{,}75$ e $x = 0{,}66$.

Assim, determinamos as coordenadas cartesianas: $R = (0.66, 0.75, 0.04)$.

Figura 7 - representa uma ilustração da imagem no GeoGebra:



Fonte: Elaborada pelos autores.

Observamos que na **Figura 7** a esfera azul que representa a Terra e as 4 esferas que representam as esferas imaginárias com centro no satélite e raio igual a distância do satélite ao receptor R.

Agora, transformamos as coordenadas cartesianas obtidas em coordenadas esféricas. As coordenadas esféricas são da forma R $(\rho, \theta, \phi) = (1, 48.86º, 2.29º)$. Onde θ e ϕ representam a latitude e longitude respectivamente. Observando que como $y > 0$, temos 48.86º L, e como $z > 0$, temos 2.29º N. Com os dados obtidos, no Google Earth, localizamos o ponto na Terra onde está o receptor.

O resultado apresentado na Figura abaixo, mostra que o receptor está próximo a Torre Eiffel, em Paris na França. Após a apresentação desse exemplo os alunos receberam o arquivo do GeoGebra e puderam mover o ponto R, receptor, identificando onde este ponto se localiza na Terra.

Figura 8 - Localização do Receptor

Fonte: Google Earth.

O exemplo apresentado, foi compreendido pelos alunos, uma vez que receberam uma folha com a resolução de sistema linear envolvendo o sistema de triangulação junto com sua solução.Vale ressaltar que os estudantes tiveram contato com a matéria de sistemas lineares durante o ano, o que potencialmente facilitou a aprendizagem.

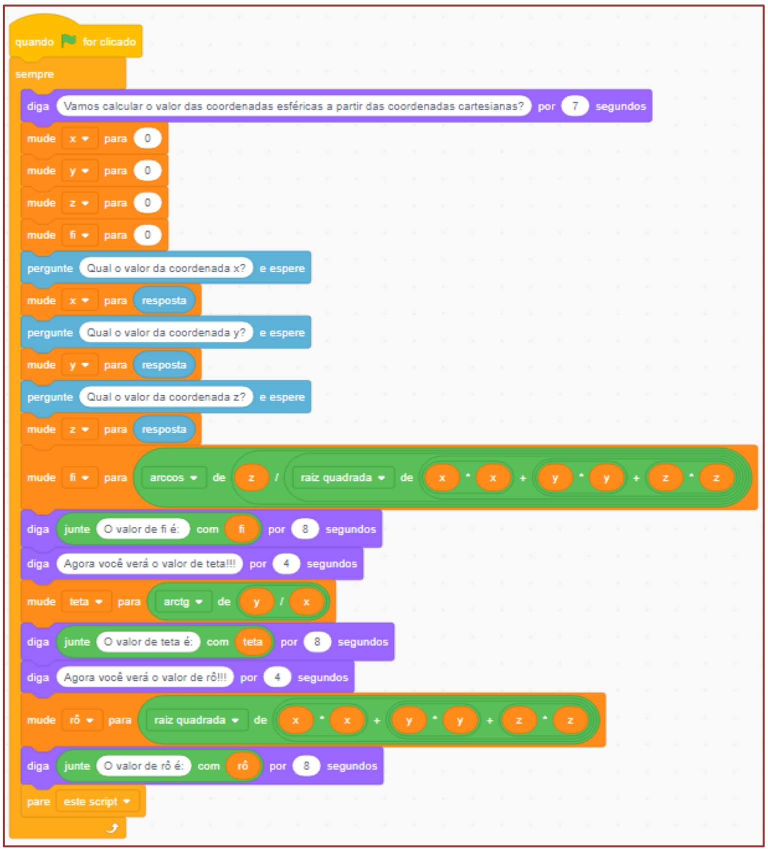
Figura 9 - Alunos na etapa 1 da aula

Fonte: Elaborada pelos autores.

4.2. ETAPA 2

Na sala dos computadores os alunos formaram grupos para iniciar o contato inicial com o Scratch. A ideia é verificar que, através das equações de transformação (1.9), podemos construir um algoritmo que permite a automatização do cálculo das coordenadas esféricas a partir das coordenadas cartesianas.

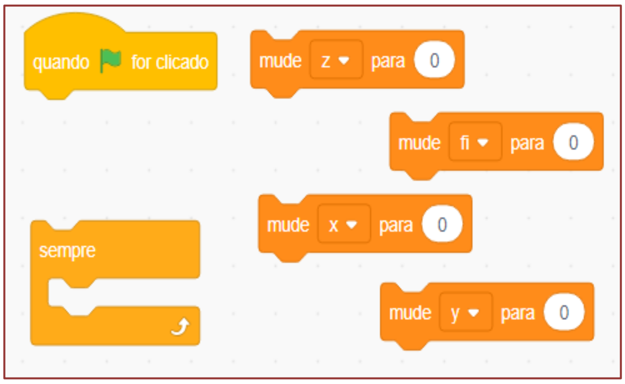
Figura 10 - Programa de transformação de coordenadas no Scratch



Fonte: Elaborada pelos autores.

Assim. como a maioria das linguagens de programação, devemos ter uma maneira de iniciar o programa e reservar as variáveis. No Scratch, fazemos isso, utilizando o bloco – quando for iniciado – e criando as variáveis na aba Variáveis, e no nosso caso criamos as variáveis x, y, z, r, θ e φ.

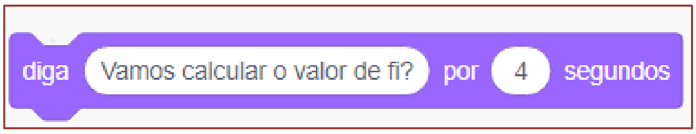
Figura 11 – Bloco de comandos iniciais



Fonte: Elaborada pelos autores.

A frase inicial que o ator irá falar será construída através do bloco – Diga por segundos – que foi acrescentada a frase – Vamos calcular as coordenadas esféricas a partir das coordenadas cartesianas?

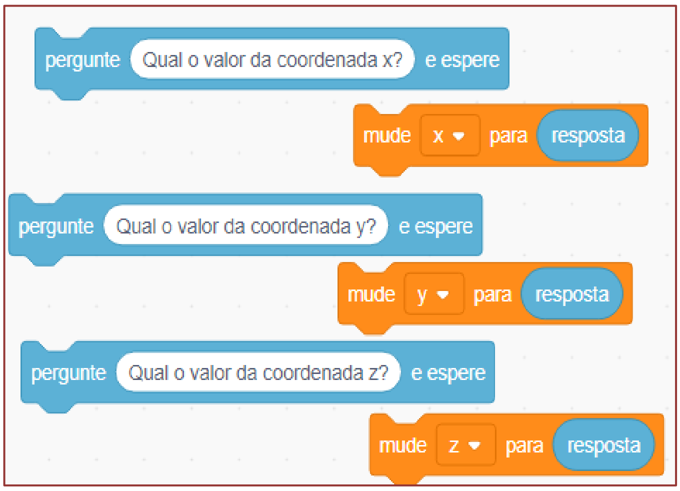
Figura 12 – Bloco da aba Aparência chamado Diga por segundos



Fonte: Elaborada pelos autores.

Para isso o programa solicita ao usuário os valores de entrada para as coordenadas cartesianas x, y e z.

Figura13 - Blocos de preenchimento das variáveis de entrada



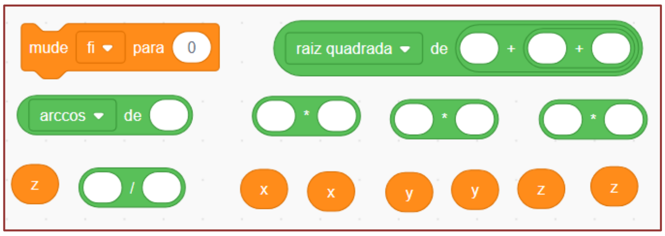
Fonte: Elaborada pelos autores.

Para que o programa realize as respectivas transformações devemos misturar blocos de variáveis com blocos de operadores matemáticos de acordo com as equações (1.9).

Figura 14 – Bloco das operações

Fonte: Elaborada pelos autores.

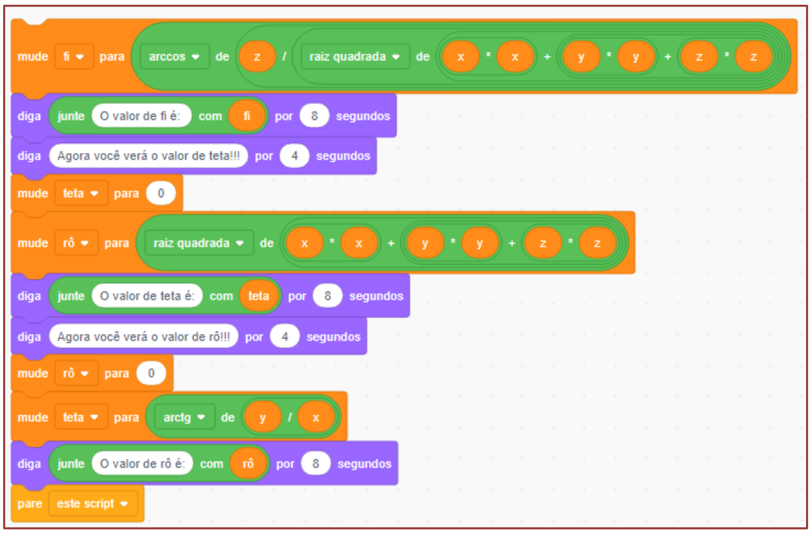
Figura 15 - Blocos para o cálculo de φ.



Fonte: Elaborada pelos autores.

Por fim, temos que criar uma forma do programa retornar a resposta para o usuário e, para isso, uniremos os blocos das equações a blocos da aba aparência com as respectivas frases de saída.

Figura 16 - Blocos de saída das respostas e finalização do programa



Fonte: Elaborada pelos autores.

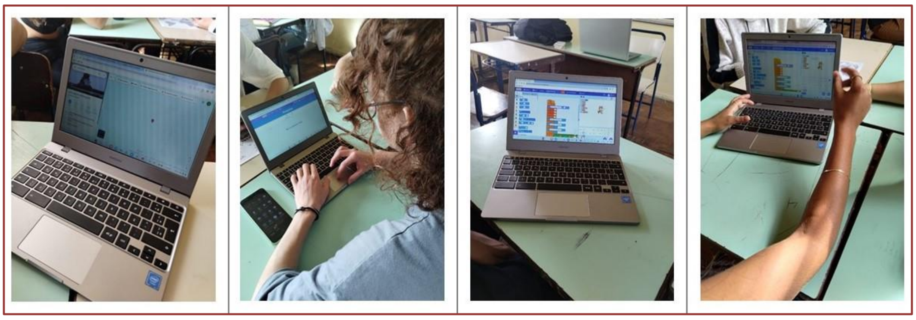
Assim, o programa está finalizado e pronto para ser testado, no nosso exemplo vamos utilizar as coordenadas $x = 40, y = 30\ e z = 60$.

Os resultados obtidos para os dados inseridos foram:

$\varphi = 39{,}805571;\ \theta = 36{,}869898\ e r = 78{,}102497$

A seguir apresentamos algumas imagens dos estudantes sujeitos da pesquisa utilizando o software com o código construído.

Figura 17 - Alunos utilizando o Scratch



Fonte: Elaborada pelos autores.

4.3. RETORNO DOS ALUNOS

Os alunos relataram que consideraram muito interessante a forma que funciona o GPS, principalmente na criatividade para implementar o sistema de triangulação,além disso foi observado uma certa dificuldade para a compreensão dos conceitos mais aprofundados de Geometria Analítica, matéria que a maioria nunca teve contato.

Quanto ao uso de recursos digitais durante a aula consideram que traz mais interesse e facilita o entendimento da teoria percebendo que facilita o trabalho e o entendimento da estrutura das operações matemáticas envolvidas.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O uso do GPS como motivação para introduzir a teoria Matemática e a posterior aplicação das ferramentas digitais, serviram de excelente suporte ao aprendizado e a construção do saber dos alunos. Por isso, insistimos que uma boa justificativa norteadora para introduzir o conhecimento teórico e prático da Matemática traz resultados expressivos, faço aqui referência ao uso do tema do GPS na nossa pesquisa que é uma boa questão norteadora, já quenos possibilitou tratar de uma boa quantidade de habilidades descritas na própria BNCC.

Concluímos então, que o uso das tecnologias digitais, além de auxiliar no processo de ensino aprendizagem dos alunos, potencializa o interesse e senso de pesquisa dos mesmos, pois o próprio assunto dessas tecnologias é inerente a geração atual carregando em si mesma algo que caracteriza os tempos atuais.

REFERÊNCIAS

[1] ARAÚJO, Fernando Silva de. **Tecnologias na Educação Matemática:** o uso do GeoGebra como ferramenta pedagógica no ensino de Geometria Espacial no Ensino Médio. 2023. 105 p. Dissertação (Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT) – Universidade Estadual do Maranhão, São Luís, 2023.

[2] BRASIL. (2018). *Ministério da Educação.* ***Computação Complemento à BNCC****.* Brasília, DF. Recuperado de <http://portal.mec.gov.br/docman/fevereiro-2022-pdf/236791-anexo-ao-parecer-cneceb-n-2-2022-bncc-computacao/file>. Acesso em: 28 nov. 2023.

[3] CASTRO, Adriane de. **O uso da programação Scratch para o desenvolvimento de habilidades em crianças do ensino fundamental**. (Dissertação de Mestrado em Matemática - Mestrado em Ensino de Ciência e Tecnologia). Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Ponta Grossa, 2017.

[4] D'AMBROSIO, Ubiratan. **Educação Matemática:** da teoria à prática. 23. ed. Campinas: Papirus, 2012.

[5] FIEGENBAUM, Joseane**. Elementos de Geometria Analítica:** uso do Aplicativo GrafEq na reprodução de obras de arte. 2015. 141 p. Dissertação (Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT) – Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2015.

[6] WIKIPÉDIA. **Sistema esférico de coordenadas**, 2021. Disponível em: https://pt.wikipedia.org/wiki/Sistema_esférico_de_coordenadas. Acesso em: 13dez. 2023.

Capítulo 7

Geometria Analítica com o GeoGebra em um projeto de ensino

Claudia Laus Angelo
Gisele de Lima Munhoz
Graciela Fagundes Jaskulski
Vitória Mesquita Rodrigues
Bruna da Rosa Machado

Resumo: Nesse capítulo serão apresentadas algumas considerações sobre o ensino-aprendizagem de Geometria Analítica, as metodologias adotadas nos encontros presenciais e nos encontros *online* do Projeto, algumas das atividades desenvolvidas e os resultados dos encontros de acordo com as percepções de acadêmicos participantes e do rendimento deles no componente curricular Geometria Analítica.

1. INTRODUÇÃO

Este trabalho relata o desenvolvimento e os resultados de um Projeto de Ensino realizado nos anos 2018, 2019 e 2021 na Universidade Federal do Pampa (Unipampa), campus Bagé, que tinha como objetivo reduzir os índices de retenção e de evasão no componente curricular Geometria Analítica ofertado em quatro cursos de engenharia (Engenharia de Produção, Engenharia Química, Engenharia de Alimentos e Engenharia de Energia) e em três licenciaturas (Física, Química e Matemática) (Angelo, 2018).

De acordo com dados da Secretaria Acadêmica dessa mesma universidade, em 2017 as evasões em Geometria Analítica foram de 41,31% e as retenções ficaram em 27,31% (Munhoz, 2018). Esses dados mostram que nos dois semestres de 2017, apenas 31,38% dos acadêmicos matriculados nesse componente foram aprovados (Jaskulski *et al*, 2019).

Os motivos desse baixo índice de aprovação não foram investigados. Porém, a tese de Santos (2016), sobre o estado da arte das pesquisas com foco no ensino e na aprendizagem de Geometria Analítica, revelou que entre as dificuldades dos estudantes estão a interpretação de problemas e a mudança de representação da gráfica para a geométrica e vice-versa.

Com a intenção de colaborar com a superação dessas possíveis dificuldades dos acadêmicos da Unipampa, vislumbrou-se a oferta de um Projeto de Ensino no qual os participantes desenvolvessem roteiros de atividades utilizando o software *GeoGebra*, com o apoio da coordenadora do Projeto, de bolsistas e de discentes voluntários já aprovados em Geometria Analítica.

Sendo assim, o Projeto de Ensino Geometria Analítica com o *GeoGebra* foi ofertado semestralmente em 2018 e em 2019 no Laboratório de Matemática Computacional (LAMAC) do Curso de Matemática do campus Bagé da Unipampa, recebendo 55 inscrições nos quatro semestres desses anos. Porém, apenas 24 acadêmicos mantiveram frequência nas atividades realizadas semanalmente, com duas horas de duração (Rodrigues *et al*, 2021).

Em 2020, com o início da pandemia de Covid-19 e as incertezas sobre o desenvolvimento das atividades acadêmicas nesse contexto, o Projeto não foi ofertado, retornando no semestre 2021-1 de forma remota, com encontros *online* via *Google Meet* e com apoio da plataforma *Google Classroom*. Nesse semestre remoto foram recebidas 58 inscrições de quatro campi da Unipampa, mas apenas 11 acadêmicos mantiveram frequência regular nos encontros síncronos semanais, com também duas horas de duração (Rodrigues *et al*, 2021).

Nos itens a seguir serão apresentadas algumas considerações sobre o ensino-aprendizagem de Geometria Analítica, as metodologias adotadas nos encontros presenciais e nos encontros *online* do Projeto, algumas das atividades desenvolvidas e os resultados dos encontros de acordo com as percepções de acadêmicos participantes e do rendimento deles no componente curricular Geometria Analítica.

2. CONSIDERAÇÕES SOBRE O ENSINO-APRENDIZAGEM DE GEOMETRIA ANALÍTICA

O componente curricular Geometria Analítica compõe a matriz curricular dos cursos de Matemática, de Física e de muitas engenharias das universidades brasileiras. Até o ano de 2022, a ementa desse componente na Unipampa, campus Bagé, contemplava os conteúdos – Vetores no plano e no espaço; Produto escalar; Produto vetorial; Produto misto; Retas no plano e no espaço; Estudo do plano; Distâncias; Cônicas; Quádricas – sendo ofertado nos primeiros semestres.

Contando com acadêmicos ingressantes na maioria das turmas, os índices de retenção e de evasão nesse componente eram muito altos. Munhoz (2018) analisou dados fornecidos pela Secretaria Acadêmica do campus Bagé da Unipampa sobre o desempenho dos estudantes matriculados nas turmas de Geometria Analítica nos anos 2016 e 2017 e obteve os percentuais descritos na tabela 1:

Tabela 1 – Resultados de Geometria Analítica na Unipampa, campus Bagé

Ano	Aprovações	Reprovações	Evasões
2016	30,48%	39,46%	30,06%
2017	31,38%	27,31%	41,31%

Fonte: Munhoz (2018).

Convém destacar que esses baixos índices de aprovação em Geometria Analítica também são uma realidade em outras universidades. Na dissertação de Nascimento (2018), que traz resultados de uma entrevista com cinco acadêmicos de um curso de Matemática e de um questionário respondido por um professor de Geometria Analítica, esse autor apresenta os seguintes índices de aprovação de acadêmicos do curso de Matemática investigado: 22% (2012), 48% (2013), 16% (2014) e 59% (2015).

Embora não se tenha realizado uma pesquisa aprofundada sobre as causas dos altos índices de retenção e de evasão na Unipampa, a primeira autora, professora de Geometria Analítica em diferentes cursos e semestres nessa universidade, percebeu que muitos acadêmicos apresentavam pouca habilidade algébrica, dificuldades em questões envolvendo frações, pouca compreensão de geometria básica, precisando aprimorar tanto as habilidades geométricas quanto as algébricas para compreenderem melhor os conteúdos desenvolvidos nesse componente curricular.

Além disso, havia uma dificuldade de os acadêmicos vincularem os resultados obtidos algebricamente com o comportamento geométrico do ente em questão (vetor, reta, plano, cônica, quádrica).

Essa defasagem de conhecimentos que poderiam ter sido consolidados na educação básica também foi percebida na pesquisa de Nascimento (2018), além de outros fatores:

> Tanto o docente quanto os discentes (em sua maioria) argumentam que, além da falta de conhecimentos matemáticos básicos, as dificuldades dos alunos também residem no fato de que: A disciplina Geometria Analítica tem um conteúdo programático muito longo, é oferecida sem nenhuma preparação anterior e que, além disso, a falta de tempo dos alunos tem prejudicado o bom andamento do processo de ensino e aprendizagem (Nascimento, 2018, p. 21).

Como possibilidades para dirimir essas dificuldades, os discentes da pesquisa de Nascimento (2018) sugeriram: incluir no primeiro semestre um componente curricular que os preparassem previamente; a oferta de cursos extraclasse; a utilização de softwares e a criação de grupos de estudos.

No caminho dessas sugestões, o Projeto de Ensino Geometria Analítica com o *GeoGebra* foi ofertado com encontros semanais regulares, na tentativa de preparar acadêmicos que ainda não haviam cursado esse componente curricular e/ou colaborar com a aprendizagem daqueles que já estavam cursando.

As metodologias adotadas nos encontros presenciais e online desse Projeto nos anos 2018, 2019 e 2021, serão descritas no item a seguir conforme constam nos trabalhos de Munhoz (2018), Jaskulski *et al* (2019) e Rodrigues *et al* (2021).

3. OS ENCONTROS DO PROJETO DE ENSINO

No ano de 2018 o desenvolvimento do Projeto de Ensino se deu em duas etapas. Uma aconteceu no final do semestre 2018-1 e a outra no decorrer do semestre 2018-2, com novos inscritos (Munhoz, 2018).

No primeiro semestre de 2018 os encontros aconteceram nas sextas-feiras pela manhã, no Laboratório de Matemática Computacional (LAMAC), com apenas quatro encontros, de junho a julho, com duração de duas horas. As inscrições foram realizadas por e-mail e 18 acadêmicos de diferentes cursos da Unipampa se inscreveram. No entanto, apenas seis frequentaram regularmente os encontros. Desses seis acadêmicos, dois estavam cursando o componente curricular Geometria Analítica, três já haviam cursado esse componente e tinham interesse em revisar os conteúdos e um ainda não havia cursado, mas se matricularia no próximo semestre (Munhoz, 2018).

Os conteúdos dos encontros de 2018-1 foram sobre Cônicas, pois estavam sendo desenvolvidos nas aulas regulares de Geometria Analítica (Munhoz, 2018).

A metodologia foi a utilização de um roteiro de atividades (Figura 1) para serem desenvolvidas com o auxílio do software *GeoGebra* e atendimentos individuais para esclarecimento de dúvidas, tanto dos conteúdos quanto do software. Esses roteiros eram impressos e entregues para os presentes a cada encontro.

Figura 1: Exemplo de parte de um roteiro de atividade

8.2. Parábolas com vértice na origem e eixo de simetria horizontal

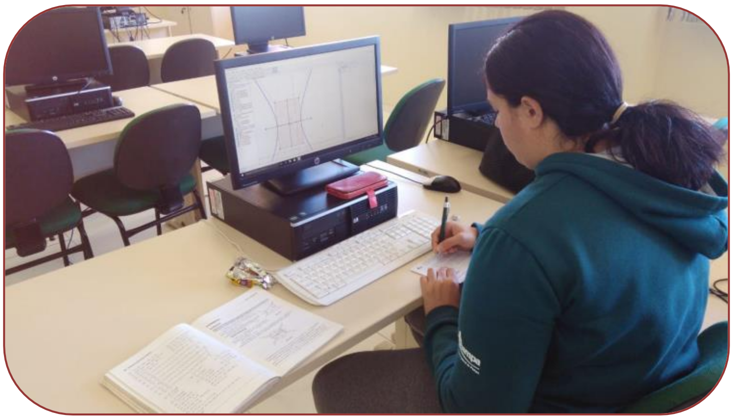
1. Digite na caixa de entrada x = -3. Dê enter. Essa será a diretriz da parábola. Digite agora o ponto F=(3,0) e dê enter. Vá na opção "Parábola" e clique no foco e na diretriz para construir uma parábola com a concavidade voltada para a direita.
2. Crie agora o ponto V=(0,0). Esse ponto é o vértice dessa parábola. Crie uma reta passando por F e por V. Essa reta é denominada de eixo de simetria da parábola. O eixo de simetria sempre passa pelo foco e pelo vértice da parábola e é perpendicular à diretriz da parábola.
3. Observando a janela de álgebra, qual é a equação dessa parábola? Escreva______________.
4. Isole a variável y^2. A equação fica:_________________.
5. A equação genérica de uma parábola que tem vértice na origem (0,0), concavidade voltada para a direita e eixo de simetria horizontal é: $y^2 = 2px$, onde p , denominado parâmetro, é a distância do foco até a diretriz.
6. Na parábola que você construiu, qual a distância p do foco à diretriz?_______________.
7. Compare o valor dessa distância com o valor que está multiplicando x na equação da parábola do item 4. O que você observa?_______________________. Verifique também a equação genérica do item 5.

Fonte: Jaskulski *et al* (2018).

No segundo semestre de 2018, o Projeto foi desenvolvido em 14 encontros de duas horas de duração, nas quartas-feiras pela manhã, no LAMAC, de agosto a novembro, com os conteúdos: Introdução a Vetores, Operações com Vetores, Retas, Planos, Cônicas e Quádricas. As inscrições também foram feitas por e-mail. Cinco acadêmicos se inscreveram e apenas três (do sexo feminino) compareceram regularmente aos encontros. As três acadêmicas estavam cursando o componente Geometria Analítica no semestre, sendo duas do Curso de Matemática – Licenciatura e uma do curso de Engenharia Química (Munhoz, 2018).

Para cada encontro, em ambos os semestres, foram elaboradas atividades investigativas que os acadêmicos desenvolveram utilizando o software *GeoGebra* (Figura 2). Algumas discussões também foram realizadas com o auxílio do quadro branco (Figura 3).

Figura 2: Acadêmica desenvolvendo atividade no *GeoGebra* em 2018



Fonte: Munhoz (2018).

Figura 3: Coordenadora do Projeto explicando no quadro em 2018

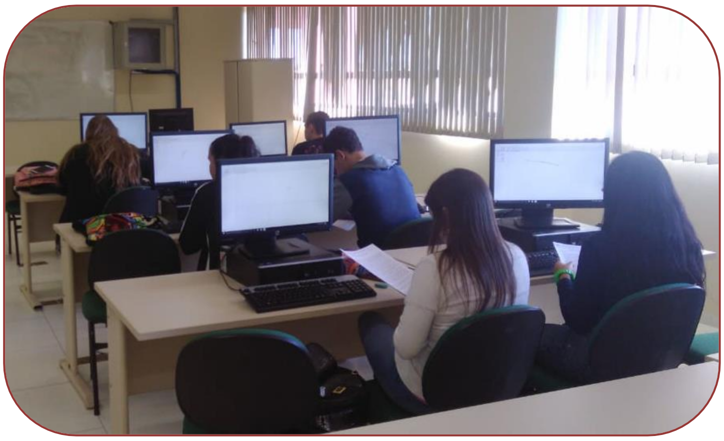
Fonte: Munhoz (2018).

Em 2018 os encontros foram conduzidos pela coordenadora do Projeto com a colaboração de duas professoras, uma bolsista que elaborou a maioria das atividades e um voluntário, todos do Curso de Matemática – Licenciatura da Unipampa.

As atividades de 2019 seguiram o mesmo padrão de 2018, porém, iniciando em abril. No primeiro semestre, 24 acadêmicos fizeram inscrição via e-mail. Mas, apenas 13 frequentaram regularmente os encontros. Desses, três estavam cursando o componente curricular Geometria Analítica (GA), sendo duas acadêmicas do primeiro semestre do Curso de Engenharia de Produção e um acadêmico do primeiro semestre do Curso de Engenharia Química. Uma acadêmica do sétimo semestre do Curso de Matemática que já havia cursado e teve aprovação em Geometria Analítica, participou do Projeto para revisar os conteúdos. Três acadêmicos do primeiro semestre do Curso de Matemática e cinco acadêmicos do primeiro semestre do Curso de Química participaram do Projeto para se familiarizar com os conteúdos e com o software, pois iriam cursar GA no terceiro semestre e no segundo semestre, respectivamente. Um acadêmico do primeiro semestre de Engenharia de Computação estava participando devido à importância dos conteúdos para o seu curso, visto que GA é componente complementar no currículo.

Os conteúdos abordados nas atividades do primeiro semestre de 2019 foram: Vetores, Operações com Vetores, Parábola, Elipse, Hipérbole e Superfícies Quádricas. Como em 2018, a metodologia dos encontros foi a utilização de um roteiro de atividades para serem desenvolvidas com o auxílio do software *GeoGebra* e atendimentos individuais. Assim, os acadêmicos davam prosseguimento às atividades conforme o seu ritmo (Figura 4). Todas as atividades foram elaboradas e/ou revistas previamente pela equipe do Projeto. No encontro sobre Superfícies Quádricas foi realizada uma atividade no Laboratório de Educação Matemática utilizando lápis de cor, cartolinas e réguas.

Figura 4: Acadêmicos do semestre 2019-1 realizando atividades



Fonte: Arquivo do Projeto.

No segundo semestre de 2019 o diferencial foi a abertura de duas turmas, uma pela manhã e outra à tarde. Para a turma da manhã apenas oito acadêmicos se inscreveram. Uma das inscritas já havia participado do Projeto no primeiro semestre e já havia sido aprovada em GA. Portanto, ela foi convidada a colaborar como monitora voluntária do Projeto. Mas, tivemos apenas dois acadêmicos que mantiveram frequência. Uma do Curso de Química que já havia cursado GA, com duas reprovações, e esperava “[...] aprender geometria” e um da Engenharia de Produção que já havia sido aprovado em 2019-1, estava participando porque as colegas haviam recomendado e esperava conseguir “[...] maior conhecimento na área”.

Para a turma da tarde, quatro acadêmicos realizaram inscrição, mas apenas duas acadêmicas do segundo semestre do Curso de Química mantiveram frequência.

Os conteúdos abordados nas atividades do semestre 2019-2 foram: Vetores, Operações com Vetores, Retas, Planos, Parábola, Elipse e Hipérbole e os encontros foram realizados conforme a metodologia dos semestres anteriores. Durante o desenvolvimento das atividades propostas nos roteiros, os integrantes da equipe circulavam para esclarecer as dúvidas dos acadêmicos e instigá-los a compreender os conceitos e visualizar os entes geométricos.

Em 2020, com o início da pandemia da Covid-19 e as incertezas sobre o desenvolvimento das atividades acadêmicas nesse contexto, o Projeto não foi ofertado. Porém, em 2021, com as atividades ainda acontecendo de forma remota, o lançamento do Programa de Desenvolvimento Acadêmico da Unipampa e a possibilidade de ter novamente um(a) bolsista, incentivou a oferta do Projeto. Mas, pairavam dúvidas em relação à metodologia de forma remota. Como observar o que os acadêmicos estariam escrevendo nos roteiros? Como acompanhar as telas do *GeoGebra* para verificar se as construções estariam no caminho esperado? No presencial, bastava circular pelo Laboratório para constatar o desenvolvimento das atividades (Rodrigues *et al*, 2021).

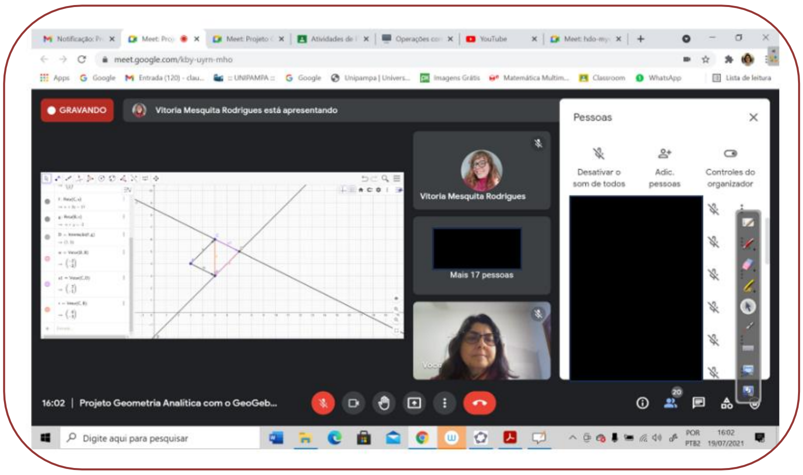
Mesmo com essas dúvidas os encontros online do Projeto foram semanais, com duas horas de duração via plataforma *Google Meet* e ocorreram de junho a outubro de 2021, contemplando o primeiro semestre letivo do mesmo ano.

Os acadêmicos participantes desenvolviam atividades investigativas sobre a maioria dos conteúdos de Geometria Analítica, com a utilização do software *GeoGebra*. Apenas o conteúdo de Quádricas não foi contemplado por falta de tempo (Rodrigues *et al*, 2021).

Também foi criada uma turma na plataforma *Google Classroom* para postagem antecipada das atividades de cada encontro e das gravações dos encontros, para avisos e para os acadêmicos devolverem as atividades realizadas. Os roteiros das atividades foram adaptados para serem realizados de forma síncrona no software *GeoGebra*, suscitando também respostas escritas dos acadêmicos e prints das construções realizadas e/ou fotos das resoluções algébricas de desafios propostos (Rodrigues *et al*, 2021).

A coordenadora, a bolsista e uma voluntária estavam sempre presentes na sala virtual para esclarecimento de dúvidas, tanto dos conteúdos quanto das construções no *GeoGebra* (Figura 5). A coordenadora sempre fazia questionamentos para eles responderem no *Chat* do *Google Meet,* procurando manter a interação, verificar como estavam desenvolvendo as questões e em qual ritmo (Rodrigues *et al*, 2021).

Figura 5: Encontro síncrono do Projeto em 2021



Fonte: Arquivo do Projeto.

Aqueles que entregavam as atividades no *Google Classroom* recebiam comentários de incentivo e observações para verificação de respostas (Rodrigues *et al*, 2021).

O grande diferencial da oferta do Projeto online foi a possibilidade de atender acadêmicos de diferentes campi da Unipampa, o que não ocorria na oferta presencial do Projeto. Foram recebidas 58 inscrições contemplando os campi Alegrete, Bagé, Caçapava do Sul e Itaqui. Entretanto, como nos semestres presenciais, apenas 11 acadêmicos mantiveram frequência semanalmente nos encontros síncronos, sendo seis do campus Bagé, dois do campus Alegrete e três do campus Caçapava do Sul. Desses 11, seis estavam cursando Geometria Analítica concomitantemente à participação no Projeto.

No item a seguir serão apresentadas como exemplos uma atividade realizada num encontro presencial do segundo semestre de 2018 e uma atividade desenvolvida num encontro remoto síncrono em 2021.

4. EXEMPLOS DE ATIVIDADES DESENVOLVIDAS

Nos encontros presenciais a atividade abaixo sobre planos (Figura 6) pretendia que os acadêmicos compreendessem a equação geral de um plano, os elementos implícitos nessa equação e as representações geométricas de diferentes planos, conforme as respectivas equações gerais.

Figura 6: Atividade de 2018 sobre planos e suas equações gerais

Universidade Federal do Pampa, campus Bagé — Curso de Matemática - Licenciatura
Projeto de Ensino: Geometria Analítica com o GeoGebra: representações no plano e no espaço cartesiano
Coordenadora: Claudia Laus Angelo — Ano: 2018

ATIVIDADE 6 – PLANOS

1. **Equação Geral de um Plano**: Dados um ponto A=(x_1, y_1, z_1) pertencente a um plano π e um vetor $\vec{n} = (a, b, c)$, $\vec{n} \neq \vec{0}$, sendo $\vec{n}$ ortogonal (normal) ao plano π, podemos escrever a equação geral desse plano:

   $$\boxed{\pi: ax + by + cz + d = 0} \longrightarrow \textbf{Equação Geral de um Plano}$$

   Nessa equação, (x, y, z) representam qualquer ponto do plano e (a, b, c) são as componentes do vetor normal ao plano.
   Vamos representar no GeoGebra 3D o plano $x + 2y - 3z + 6 = 0$. Basta digitar essa equação na caixa de entrada. Como a equação aparece na janela de álgebra?______________________Agora vamos obter alguns pontos desse plano. Na equação $x + 2y - 3z + 6 = 0$:
   - Faça $x = 0$, $y = 0$ e calcule z. Você obteve o ponto (0, 0,___) do plano. Represente-o.
   - Faça $y = 0$, $z = 0$ e calcule x. Você obteve o ponto (__, 0, 0) do plano. Represente-o.
   - Faça $x = 0$, $z = 0$ e calcule y. Você obteve o ponto (0,___, 0) do plano. Represente-o.
   - Escolha outros dois valores para duas das variáveis e calcule a terceira para obter outro ponto do plano: $x =$____, $y =$_____, $z =$______. Ponto: (____,____,____). Represente-o.
   - Represente também os pontos $P = (1, 1, 3)$ e $Q = (-1, -1, 1)$. Com a opção "Vetor", clique nos pontos P e Q, nessa ordem. O vetor $\vec{u} = \overrightarrow{PQ}$ = (___,___,___) pertence ao plano. Represente também o vetor $\vec{n}$ =(___,___,___), normal ao plano. Agora obtenha um vetor $\vec{v} = \vec{n}$, com origem no ponto P. Você terá que determinar o ponto que é a extremidade R do vetor $\vec{v} = \overrightarrow{PR}$.

     Assim, R = (___,____,____). Represente-o. Com a opção "Vetor", clique nos pontos P e R, nessa ordem. Você representou o vetor $\vec{v} = \overrightarrow{PR}$.
   - Determine o ângulo QPR. O que você observa?____

   Exercício:
   a) Obtenha a equação geral do plano π que passa pelo ponto $A(1, 0, 4)$ e tem vetor normal $\vec{n} = (2, -1, 3)$.
   b) Represente este plano no GeoGebra.
   c) Determine algebricamente os pontos de interseção desse plano com os eixos.
   d) **Desafio**: Obtenha a equação do plano paralelo ao plano π que passe pelo ponto $B(2, -1, 1)$. Represente-o no GeoGebra e verifique o paralelismo.

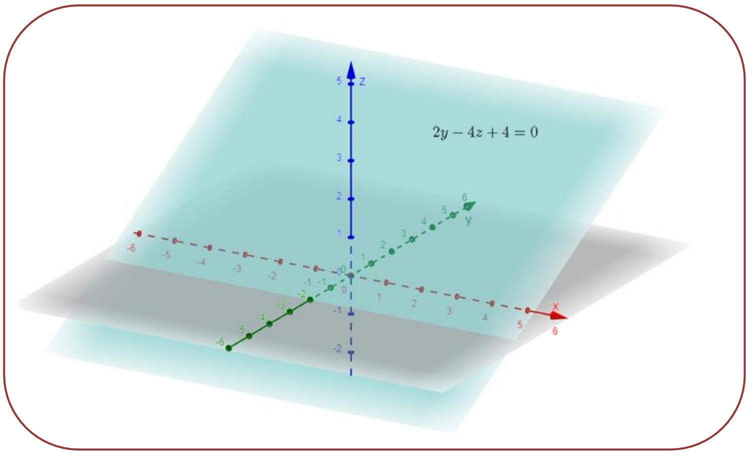
2. **Planos paralelos aos eixos coordenados**: Quando a equação geral de um plano não tiver uma das variáveis x, y ou z, o plano será paralelo, respectivamente, aos eixos x, y, ou z. Represente os planos abaixo no GeoGebra e verifique:
   a) $2y - 4z + 4 = 0$, plano paralelo ao eixo____.
   b) $x + 2y - 6 = 0$, plano paralelo ao eixo____.
   c) $3x - z + 3 = 0$, plano paralelo ao eixo____.
   d) $y - 2z = 0$, plano paralelo ao eixo____. Esse plano contém a origem (0,0,0) e todos os pontos do eixo ____.

3. **Planos paralelos aos planos coordenados**: Quando a equação geral de um plano não tiver duas das variáveis o plano será paralelo a um dos planos coordenados (xOy, xOz ou yOz). Represente os planos abaixo no GeoGebra e verifique:
   a) $x - 4 = 0$. Esse plano é paralelo ao plano _____e interseta o eixo x no ponto (___,___,___). Com a opção "Ponto em objeto", represente outros pontos nesse plano. O que você observa em relação à coordenada x?____.
   b) $2y + 3 = 0$. Esse plano é paralelo ao plano _____ e intersecta o eixo y no ponto (___,___,___). Com a opção "Ponto em objeto", represente outros pontos nesse plano. O que você observa em relação à coordenada y?____.
   c) $z = -3$. Esse plano é paralelo ao plano ______ e intersecta o eixo z no ponto (___,___,___). Com a opção "Ponto em objeto", represente outros pontos nesse plano. O que você observa em relação à coordenada z?____.

Fonte: Arquivo do Projeto.

De maneira geral, mesmo com o auxílio da representação dos planos no *GeoGebra* (Figura 7), alguns participantes encontravam dificuldade em verificar o paralelismo entre os planos do item 2 e os eixos coordenados.

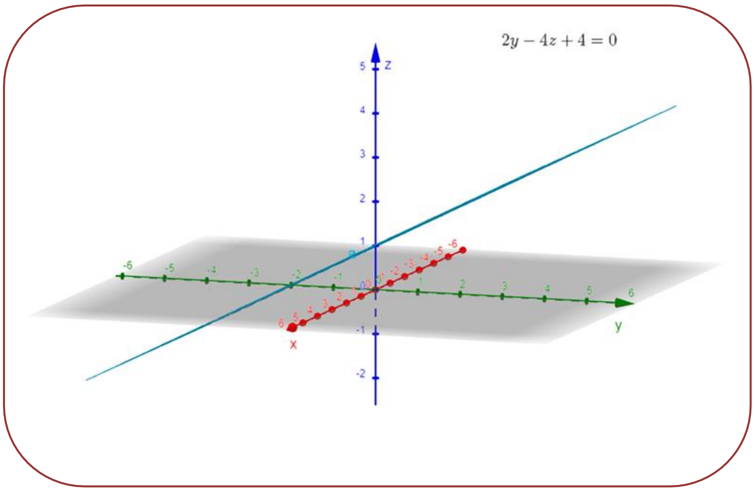
Figura 7: Plano $2y-4z+4=0$ na tela do GeoGebra ao ser digitado



Fonte: *GeoGebra*.

Porém, com a possibilidade de circular pelo Laboratório e auxiliar cada participante, eles eram incentivados a movimentar a janela de visualização do *Geogebra* para chegar em posições favoráveis à visualização do paralelismo (Figura 8).

Figura 8: Plano $2y - 4z + 4 = 0$ com visualização do paralelismo ao eixo x

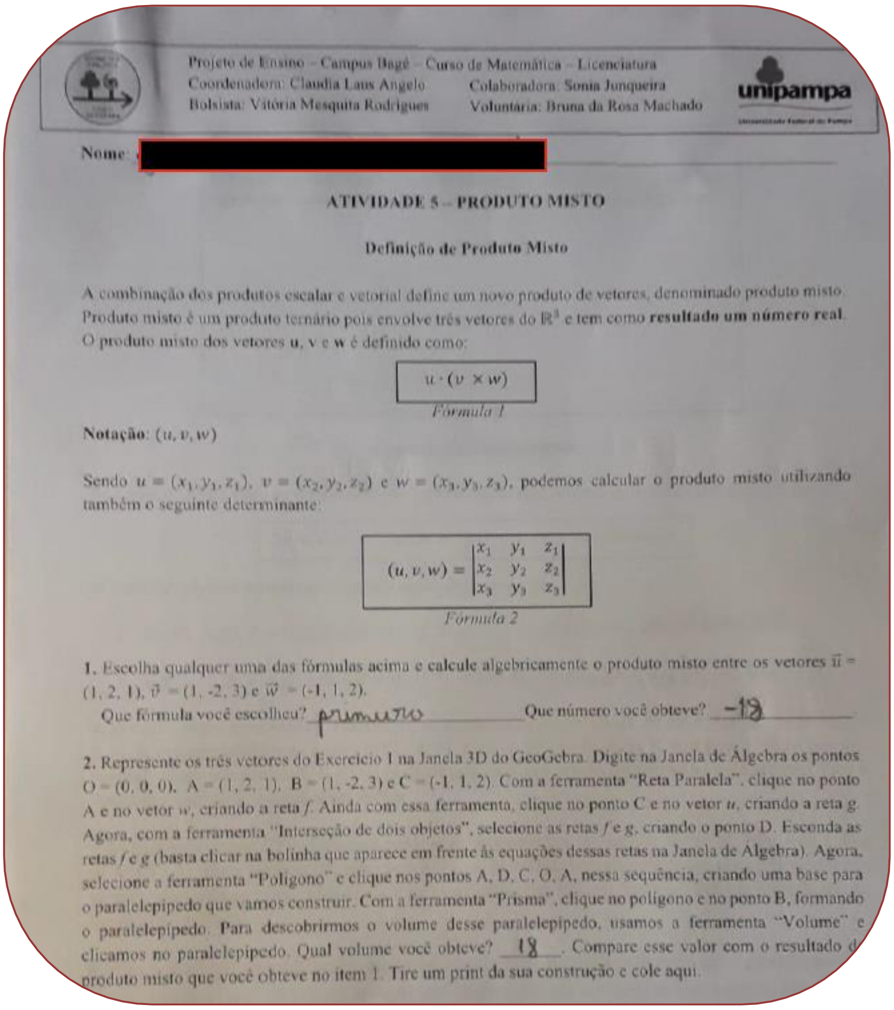


Fonte: *GeoGebra*.

O mesmo atendimento acontecia nas dificuldades de preenchimento das lacunas da atividade que exigiam cálculos algébricos, numéricos e compreensão da teoria resumida brevemente antes das questões. Sempre que necessário, a coordenadora utilizava o quadro para esclarecer dúvidas gerais dos participantes.

A atividade seguinte (Fig. 9), postada no *Google Classroom* por um dos acadêmicos frequentes em 2021, exemplifica o trabalho realizado nos encontros online.

Figura 9: Parte da atividade 5 postada no Google Classroom por um acadêmico



Projeto de Ensino – Campus Bagé – Curso de Matemática – Licenciatura
Coordenadora: Claudia Laus Angelo   Colaboradora: Sonia Junqueira
Bolsista: Vitória Mesquita Rodrigues   Voluntária: Bruna da Rosa Machado

unipampa

Nome: [redacted]

ATIVIDADE 5 – PRODUTO MISTO

Definição de Produto Misto

A combinação dos produtos escalar e vetorial define um novo produto de vetores, denominado produto misto. Produto misto é um produto ternário pois envolve três vetores do $\mathbb{R}^3$ e tem como **resultado um número real**. O produto misto dos vetores **u**, **v** e **w** é definido como:

$$\boxed{u \cdot (v \times w)}$$

Fórmula 1

Notação: (u, v, w)

Sendo $u = (x_1, y_1, z_1)$, $v = (x_2, y_2, z_2)$ e $w = (x_3, y_3, z_3)$, podemos calcular o produto misto utilizando também o seguinte determinante:

$$\boxed{(u, v, w) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}}$$

Fórmula 2

1. Escolha qualquer uma das fórmulas acima e **calcule** algebricamente o produto misto entre os vetores $\vec{u} = (1, 2, 1)$, $\vec{v} = (1, -2, 3)$ e $\vec{w} = (-1, 1, 2)$.

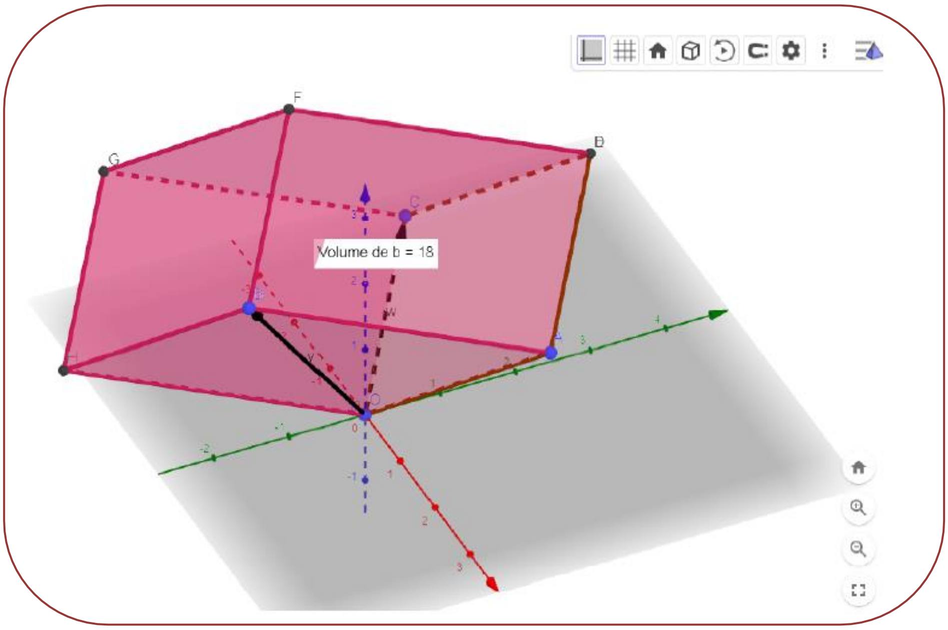
Que fórmula você escolheu? primeiro   Que número você obteve? -18

2. Represente os três vetores do Exercício 1 na Janela 3D do GeoGebra. Digite na Janela de Álgebra os pontos O = (0, 0, 0), A = (1, 2, 1), B = (1, -2, 3) e C = (-1, 1, 2). Com a ferramenta "Reta Paralela", clique no ponto A e no vetor *w*, criando a reta *f*. Ainda com essa ferramenta, clique no ponto C e no vetor *u*, criando a reta g. Agora, com a ferramenta "Interseção de dois objetos", selecione as retas *f* e g, criando o ponto D. Esconda as retas *f* e g (basta clicar na bolinha que aparece em frente às equações dessas retas na Janela de Álgebra). Agora, selecione a ferramenta "Polígono" e clique nos pontos A, D, C, O, A, nessa sequência, criando uma base para o paralelepípedo que vamos construir. Com a ferramenta "Prisma", clique no polígono e no ponto B, formando o paralelepípedo. Para descobrirmos o volume desse paralelepípedo, usamos a ferramenta "Volume" e clicamos no paralelepípedo. Qual volume você obteve? 18. Compare esse valor com o resultado d produto misto que você obteve no item 1. Tire um print da sua construção e cole aqui.

Fonte: Arquivo do Projeto.

Como pode ser visto na imagem acima (Fig. 9), esse acadêmico enviou uma foto da atividade respondida durante o encontro sobre Produto Misto. Como o item 2 solicitava um print da construção realizada no *GeoGebra*, ele a apresentou no final (Figura 10).

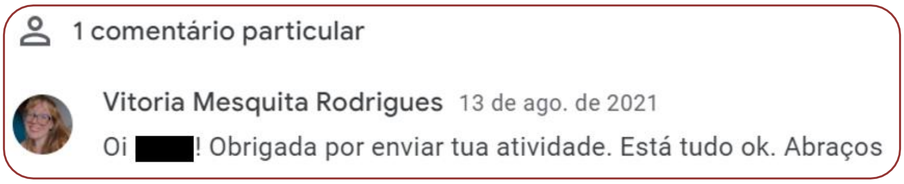
Figura 10: Construção do item 2 da atividade 5 realizada pelo acadêmico



Fonte: Arquivo do Projeto.

Sobre as atividades postadas convém destacar que alguns acadêmicos baixavam a atividade em *Word* e digitavam suas respostas. Outros mesclavam a digitação com fotos da resolução realizada no caderno ou numa folha. A equipe sempre dava um retorno das atividades postadas, com algum comentário, como no exemplo abaixo (Figura 11), do mesmo acadêmico.

Figura 11: Comentário da atividade postada no *Google Classroom*



Fonte: Arquivo do Projeto.

Porém, nem todos os acadêmicos devolviam as atividades realizadas nos encontros, dificultando a percepção da equipe sobre a evolução da aprendizagem dos conteúdos desenvolvidos.

Mesmo assim, os resultados dos onze participantes de 2021 que mantiveram a frequência nos encontros foram positivos, como será mostrado no próximo item.

5. RESULTADOS DO PROJETO AO LONGO DOS ANOS

No primeiro semestre de 2018, como já dito, apenas seis acadêmicos mantiveram frequência regular nos quatro encontros organizados, sendo que apenas dois estavam cursando Geometria Analítica e foram aprovados. Destaca-se que um deles estava matriculado nesse componente pela terceira vez.

No último desses encontros, foi combinado o envio de um questionário online para que eles respondessem e alguns comentários e resultados são descritos a seguir:

Dos quatro encontros presenciais, todos faltaram a um encontro, em datas diferentes, mas solicitaram a atividade realizada para desenvolver em outro momento.

Quanto à metodologia dos encontros, todos a julgaram adequada. Um dos acadêmicos escreveu “Sim. Estava tudo muito bem elaborado e todos sabiam tirar minhas dúvidas e de outros colegas”. Outro observou também a possibilidade de comparação das atividades desenvolvidas “Sim. Foi realizado atividades que envolvia trabalhos no programa geogebra e atividades com exercícios construindo sem o geogebra, assim podemos comparar as atividades”. As demais respostas dadas pelos acadêmicos demonstraram que a utilização de roteiros com atividades investigativas para serem desenvolvidas tanto com o software quanto com lápis e papel, foram adequadas à compreensão dos conteúdos sobre Cônicas (Jaskulski *et al*, 2018).

No segundo semestre de 2018, apenas três acadêmicas frequentaram os 14 encontros do Projeto e serão mostradas algumas falas delas, denominadas por A, B e C e obtidas por entrevistas semiestruturadas (Munhoz, 2018).

Quando questionadas sobre o interesse em participar do Projeto, a Acadêmica A, por exemplo, disse que se interessou “Porque o projeto é uma extensão da Geometria Analítica, então é um complemento para a matéria, então achei interessante participar”. A Acadêmica B ressaltou já estar com dificuldade nos primeiros dias de aula do componente Geometria Analítica. Destaca-se também sua fala: “Porque eu estava com muita dificuldade em Geometria Analítica”. Já a Acadêmica C dá início a sua resposta ressaltando o alto índice de repetência nesse componente (Munhoz, 2018).

Sobre o que estavam achando do Projeto, destaca-se a resposta da Acadêmica A, que falou sobre a interação do Projeto às aulas regulares e a utilização do *GeoGebra*: “Estou achando bem interessante, porque como as aulas do projeto são antes da aula normal, quando eu chego na aula já tenho uma base. Então como a gente utiliza o geogebra, já dá para visualizar mais, dá um complemento bem grande, então é bem bom”. A resposta da Acadêmica B destaca também o resultado obtido na avaliação: “Muito bom, me ajuda bastante, tanto que eu fui bem na prova”. A Acadêmica C complementa destacando a metodologia do Projeto: “Eu acho maravilhoso né, porque tu vê tudo na prática, quase nada teórico, tu está visualizando, está assimilando, o que é diferente da sala de aula que é mais teórico” (Munhoz, 2018).

As três acadêmicas notaram diferença para resolver os exercícios do componente Geometria Analítica após a participação nos encontros do Projeto, sendo que as acadêmicas A e C destacaram o uso do *GeoGebra*. Suas falas a esse respeito foram: “Sim, pois agora quando eu não entendo e não consigo visualizar o que o exercício pede, eu coloco no *GeoGebra* e consigo resolver depois” (Acadêmica A) e a Acadêmica C disse: “Sim, teve até alguns que eu tive que ir para o *GeoGebra* para ver o que o exercício estava pedindo. (...)”. Nessa mesma pergunta, a Acadêmica B salientou a facilidade em resolver os exercícios das aulas regulares destacando os desafios propostos nos encontros do Projeto (Munhoz, 2018).

Sobre o uso do *GeoGebra* para resolver exercícios de Geometria Analítica nas aulas regulares, as falas das acadêmicas A e C mostradas acima evidenciaram que o software foi utilizado com frequência. A Acadêmica B respondeu: “Para resolver não, mas para depois ver sim. Ver como ficava, ver como era”. A Acadêmica A também disse: “Até teve uma vez que você me perguntou se eu usava e eu disse que não, aí depois eu comecei a usar. Agora na última prova eu usei para fazer bastantes exercícios, porque eu precisava visualizar os planos, secantes, então eu usei bastante”. Percebe-se nas falas das acadêmicas que o *GeoGebra* foi utilizado por elas tanto para ter uma compreensão dos exercícios como para visualizar o comportamento dos entes geométricos antes e depois de resolvê-los algebricamente.

As três acadêmicas estavam cursando o componente Geometria Analítica pela primeira vez e os resultados foram positivos.

Nos encontros do primeiro semestre de 2019, dos 13 acadêmicos frequentes, apenas três estavam cursando Geometria Analítica e participando do Projeto e todos foram aprovados. Além disso, alguns acadêmicos relataram que a utilização do *GeoGebra* foi importante, pois o mesmo poderia ser utilizado em outros componentes, como Teoria Elementar das Funções e Cálculo I e durante os encontros era notável o aprimoramento da visão geométrica e espacial dos participantes. A revisão de matemática básica durante o desenvolvimento das questões algébricas também foi muito explorada e foram perceptíveis as dificuldades que alguns participantes apresentavam.

Com relação à metodologia, como em 2018, as respostas dos acadêmicos demostraram que foi adequada, como mostram as seguintes respostas: “O projeto ajudou muito no aprendizado, além de facilitar através do software o entendimento de geometria”; “A metodologia é muito boa esclarece bastante sobre geometria analítica”. Em relação aos roteiros impressos, percebe-se que possibilitaram a cada participante desenvolver as atividades no seu ritmo, como destacou um dos participantes: “Eu gostei das folhinhas, porque tem alunos que são mais rápidos para fazer e outros mais calmos e as folhinhas ajudaram para que cada um fosse no seu tempo”. Alguns participantes também destacaram o encontro sobre Quádricas que envolveu a utilização de lápis, cartolinas, lápis de cor, réguas e esquadros: “Foi bem didático cada encontro, apesar do geogebra ser um software que nos dá os gráficos prontos, particularmente gostei da última aula quando desenhamos as superfícies.”; “Achei ótima a maneira que foi desenvolvida esta última aula, com todos nós fazendo juntos, acompanhando a professora e desenhando.”.

No segundo semestre de 2019 a participação dos acadêmicos foi bem reduzida. Das duas acadêmicas do Curso de Química que frequentaram os encontros de sexta-feira à tarde, apenas uma foi aprovada em Geometria Analítica. Vale ressaltar que a outra possuía muita dificuldade com os conteúdos de matemática básica tais como regras de sinais, produtos notáveis, resolução de equações etc. Ela conseguiu desenvolver um pouco a percepção geométrica com o auxílio do *GeoGebra*, mas as dificuldades algébricas não foram superadas. Pode-se dizer o mesmo da acadêmica também do Curso de Química da turma de segunda-feira pela manhã. No entanto, ela não estava cursando Geometria Analítica concomitantemente à participação no Projeto. Essa acadêmica desenvolveu as atividades lentamente, necessitando de maior atenção e conseguiu chegar apenas às atividades sobre Planos. Mas, no questionário de avaliação do Projeto ela comentou: “Quando me inscrevi no projeto não sabia absolutamente nada, estava totalmente perdida, acredito que apesar de ainda ter muitas dificuldades melhorei e aprendi bastante, hoje já consigo assimilar o conteúdo”.

Um acadêmico de Engenharia de Produção da turma da manhã que já havia cursado Geometria Analítica, sendo aprovado, comentou no último encontro que gostou de ter participado do Projeto pois pôde realizar as atividades com calma e compreender melhor as relações algébricas e geométricas que anteriormente ele realizava mecanicamente. Sobre a metodologia do Projeto, o mesmo escreveu: "São atividades bem trabalhadas, com desenvolvimento teórico e com ajudada dos professores e bolsistas se torna algo mais dinâmico e divertido de fazer".

Durante a pandemia de Covid-19, a oferta do Projeto de forma online no primeiro semestre de 2021, superou as expectativas da equipe executora, pois os acadêmicos que mantiveram frequência relataram ter compreendido muito melhor os conteúdos de Geometria Analítica trabalhados, pois o software *GeoGebra* facilitou a visualização e a compreensão das representações geométricas de vetores, retas, planos, elipses, hipérboles e parábolas. Além disso, eles ampliaram suas habilidades com algebrismos e com a utilização desse software.

Foi possível atender acadêmicos de diferentes campi da Unipampa, o que não ocorria na oferta presencial do Projeto. Foram recebidas 58 inscrições contemplando os campi Alegrete, Bagé, Caçapava do Sul e Itaqui. Entretanto, como nos semestres presenciais, apenas 11 acadêmicos mantiveram frequência semanalmente nos encontros síncronos, sendo seis do campus Bagé, dois do campus Alegrete e três do campus Caçapava do Sul. Desses 11, seis estavam cursando Geometria Analítica concomitantemente à participação no Projeto e todos foram aprovados.

No questionário de avaliação parcial do Projeto, respondido no antepenúltimo encontro, perguntamos aos frequentes, por que mantiveram sua participação, tendo em vista a desistência de muitos. Algumas respostas foram: "Por estar cursando Geometria Analítica, e assim ter mais possibilidades de compreender o conteúdo e também por ser um Projeto de Ensino e contar como horas de ACGs." (Acadêmica 1 – Bagé); "Pois achei muito bom desde o primeiro dia, então não teria porque desistir."(Acadêmico 2 – Bagé); "Sempre é bom ter algum conhecimento a mais, por isso continuei vindo. Mas não foi apenas isso, também continuei pois isso me ajudará a resolver problemas de geometria, cálculo e física mais rapidamente com o geogebra." (Acadêmico 3 – Alegrete); "Porque achei bem interativo e bem explicado. Valeu bastante a pena em participar desse projeto pois me ajudou bastante a entender melhor os conteúdos de geometria analítica." (Acadêmica 4 – Bagé).

Perguntamos também se as expectativas que eles tinham quando se inscreveram no Projeto estavam sendo contempladas e as respostas foram muito positivas: "Sim, está me ajudando bastante principalmente com a cadeira de geometria que estou fazendo este semestre." (Acadêmico 5 – Alegrete); "Sim, e bem mais. Achei que seria uma parte bem básica do assunto. Consegui me aprofundar melhor." (Acadêmico 6 – Caçapava do Sul); "Sim, aprendi a usar as funcionalidades básicas do geogebra enquanto resolvia as questões de Geometria Analítica." (Acadêmico 7 – Caçapava do Sul).

A metodologia dos encontros também foi aprovada pelos participantes frequentes: "Sim, o método de explicar a teoria conforme surge a necessidade para resolver os exercícios, e o fato de resolver as atividades com os alunos transforma uma aula tradicional em um grupo de estudos em que todos podem interagir mais." (Acadêmico 7 – Caçapava do Sul); "Sim, qualquer dúvida podemos tirar na hora, ótima metodologia." (Acadêmico 10 – Caçapava do Sul); "Achei muito bom, pois cada um faz no seu tempo, e não importa se o aluno tem dúvida do começo ou do final da lista, as explicações não trazem conflito. E sempre gostei também muito de como as questões das listas são escritas e elaboradas passo-a-passo." (Acadêmico 2 – Bagé).

A maioria dos concluintes sugeriu que, mesmo com o retorno às atividades presenciais, o Projeto fosse ofertado de forma presencial e também de forma online.

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Embora o número de participantes que manteve a frequência nos encontros regulares do Projeto seja muito pequeno quando comparado ao número de inscritos no início de cada semestre, os retornos desses que ficaram sobre as aprendizagens adquiridas, as metodologias adotadas, os roteiros criados e desenvolvidos e as interações com a equipe, foram muito positivos.

A questão do interesse e participação de acadêmicos em projetos extracurriculares ainda é um desafio, mas acredita-se que se deve insistir em ações no campo da Matemática para que eventuais dificuldades não superadas na Educação Básica não sejam ignoradas no Ensino Superior.

Além disso, apesar da desistência da maioria dos inscritos, conclui-se que para os que mantiveram frequência nos encontros, todos os objetivos específicos do Projeto foram contemplados. Os participantes puderam desenvolver o raciocínio algébrico e o raciocínio geométrico através de atividades investigativas mediadas pela utilização do software *GeoGebra*; refinaram a visualização espacial de figuras; resolveram problemas de Geometria Analítica e aprimoraram conceitos de matemática da Educação Básica.

Os ótimos retornos dos participantes da edição online sugerem também que esse Projeto de Ensino pode ser ofertado como um Projeto de Extensão para acadêmicos de outras universidades, para estudantes do Ensino Médio que pretendem seguir a carreira nas ciências exatas e para todos que se interessarem pelo tema.

REFERÊNCIAS

[1] ANGELO, Claudia Laus (Coord.). **Geometria analítica com o GeoGebra**: representações no plano e no espaço cartesiano: projeto de ensino. Unipampa: Bagé, 2018. Registro SIPPEE: 02.033.18. Disponível em: https://www10.unipampa.edu.br//portal/resumo.php?projeto_id=10439. Acesso em: 13 fev. 2023.

[2] JASKULSKI, Graciela Fagundes *et al*. Geometria analítica com o GeoGebra: possibilidades de um projeto de ensino. *In*: SALÃO INTERNACIONAL DE ENSINO, PESQUISA E EXTENSÃO DA UNIPAMPA, 10, 2018, Santana do Livramento. **Anais** [...]. Disponível em: https://periodicos.unipampa.edu.br/index.php/SIEPE/article/view/86458. Acesso em: 15 set. 2024.

[3] JASKULSKI, Graciela Fagundes *et al*. A metodologia de um projeto de ensino sobre Geometria Analítica: do algébrico para o geométrico. *In*: SALÃO INTERNACIONAL DE ENSINO, PESQUISA E EXTENSÃO DA UNIPAMPA, 11, 2019, Santana do Livramento. **Anais** [...]. Disponível em: https://periodicos.unipampa.edu.br/index.php/SIEPE/article/view/87761. Acesso em: 25 abr. 2024.

[4] MUNHOZ, Gisele de Lima. **Uma análise do desenvolvimento de atividades de Geometria Analítica com o software GeoGebra**. 2018. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) – Universidade Federal do Pampa, Bagé, 2018.

[5] NASCIMENTO, Amauri Silva do. **Uma proposta didática para utilizar o GeoGebra no ensino da disciplina de Geometria Analítica**. 2018. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Universidade Estadual de Santa Cruz, Ilhéus, 2018.

[6] RODRIGUES, Vitória Mesquita *et al*. Do presencial para o remoto: adaptações de um projeto de ensino. *In*: SALÃO INTERNACIONAL DE ENSINO, PESQUISA E EXTENSÃO DA UNIPAMPA, 13, 2021. **Anais** [...]. Disponível em: https://periodicos.unipampa.edu.br/index.php/SIEPE/article/view/110193. Acesso em: 25 abr. 2024.

[7] SANTOS, Adriana Tiago Castro dos. **O Estado da Arte das pesquisas brasileiras sobre Geometria Analítica no período de 1991 a 2014.** Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2016.

Capítulo 8

La historia de las matemáticas: ¿por qué y para qué? O ¿cómo hacer cautivador el discurso memático?

Tamara Díaz-Chang

Resumen: Este trabajo se propone exponer la contradicción generada por el creciente desinterés que existe hoy en día por las matemáticas, en un mundo donde el acelerado desarrollo de la tecnología demanda cada vez más profesionales de matemáticas. Para realizar nuestro análisis nos basaremos en el método histórico-lógico y en la perspectiva sociocultural de Vygotsky, que considera los supuestos ontológicos del constructivismo social como filosofía de las matemáticas. Las ideas que se exponen parten de una postura en defensa de la incorporación de la historia como recurso didáctico en la enseñanza y la divulgación de las matemáticas, y la oportunidad que nos brinda de crear entornos matemáticos educativos de mayor riqueza, dentro y fuera de las salas de clases, provocando una actitud crítica sobre el discurso matemático tradicional y su impacto en la sociedad en general.

Palabras clave: Enseñanza de las matemáticas, Método histórico-lógico, Historia como recurso didáctico.

1. INTRODUCCIÓN

En la actualidad se está produciendo un fenómeno que pudiéramos llamar la extinción de los matemáticos y que tiene diversas causas (Sánchez, 2013). La mayoría de los estudiantes universitarios, incluso los de carreras en ciencias exactas e ingenierías, tienen poco o ningún interés en las asignaturas matemáticas y en ocasiones, hasta las consideran solo como un desagradable requisito necesario para graduarse y poder ejercer una carrera profesional. De hecho, no son pocos los estudiantes que afirman haber elegido una determinada carrera, en gran parte, porque "no tenía matemáticas". Con preocupación, desde nuestra experiencia como profesores de matemáticas, observamos estas actitudes cada vez con mayor frecuencia entre nuestros estudiantes y nos preguntamos: ¿por qué sucede esto?

Este fenómeno, además, nos parece paradójico, sobre todo, si tenemos en cuenta que las matemáticas constituyen una de las creaciones humanas más antiguas, que se viene desarrollando desde hace más de cuatro mil años y que está estrechamente ligada al desarrollo de nuestra civilización actual. Surgió como respuesta a diferentes necesidades sociales y económicas de civilizaciones antiguas en Babilonia, Egipto, Mesopotamia, India, China, Grecia y Roma, por nombrar solo algunas. En estas sociedades, los problemas de tipo matemático surgían por medio de la investigación empírica y buscaban dar soluciones a problemas concretos de la vida diaria. Posteriormente, y a partir del desarrollo que se produjo en la antigua Grecia con la creación de la Escuela Pitagórica y la fundación de otras escuelas en los siguientes períodos de la historia en la cuenca del Mediterráneo, se comenzaron a desarrollar y perfeccionar los métodos teóricos deductivos (Karaduman, 2010). El desarrollo histórico de las matemáticas pone de manifiesto, de forma elocuente, que esta ciencia siempre ha estado íntimamente ligada a su contexto económico, social y cultural y que es, por ende, indisociable del desarrollo de la humanidad.

Por otra parte, si estudiamos el surgimiento y desarrollo de otras ciencias como la física, la química, la biología, la economía o la psicología, podemos observar que las matemáticas están en las bases y fundamentos de cada una de ellas. Así, podemos decir que, dado que la comprensión del mundo se basa en teorías científicas, las matemáticas representan una parte muy importante del patrimonio y del legado cultural y científico de la humanidad, así como constituyen una herramienta versátil y poderosa que nos permite estudiar nuestro mundo.

La sociedad moderna depende más que nunca de los cambios tecnológicos que se han ido produciendo en las últimas décadas y las fases de este acelerado desarrollo tecnológico no se hubieran podido producir sin el empleo de las matemáticas. Por otra parte, en el mundo tecnológico actual, la demanda de matemáticos es alta y seguirá creciendo debido a factores clave como la creciente disponibilidad de grandes cantidades de datos para analizar, interpretar y de los cuales se puede extraer información valiosa. Los matemáticos desempeñan un papel crucial en el desarrollo de algoritmos, modelos matemáticos y técnicas de análisis de datos para resolver problemas en una variedad de campos, incluyendo el reconocimiento de patrones, la inteligencia artificial, el aprendizaje automático, la minería y la ciencia de datos en general.

Además, las empresas de tecnología, desde startups hasta grandes corporaciones, dependen cada vez más de matemáticos para desarrollar y mejorar productos y servicios. Los matemáticos son necesarios en áreas como el diseño de algoritmos, la optimización de procesos, la seguridad cibernética, el desarrollo de software y la programación de sistemas informáticos.

En particular, con la creciente amenaza de ciberataques y la necesidad de proteger la información confidencial, la criptografía y la seguridad informática son áreas de gran importancia. Los matemáticos juegan un papel crucial en el diseño y análisis de algoritmos criptográficos, protocolos de seguridad y sistemas de detección de intrusiones.

Todo lo anterior hace aún más acuciante la necesidad de reflexionar sobre esta contradicción (que, *grosso modo*, se puede enunciar como el desinterés creciente por las matemáticas en un mundo con una demanda cada vez mayor de matemáticas).

Una posible reflexión y uno de los posibles elementos que podrían estar influyendo en las causas de esta contradicción, se encuentra quizá en nuestra práctica docente, en relación con la gran diversidad que existe entre los matemáticos y los educadores matemáticos en cuanto a las diferentes formas de ver las matemáticas (Radford, 2016). Algunos, compartiendo la posición de Pitágoras, postulan que las matemáticas están constituidas por un conjunto de verdades atemporales y abstractas que describen nuestro mundo (Bell, 2003), fundamentalmente inconsistente con una visión como la de Vygotsky (1984), que considera que las matemáticas se han desarrollado a través de la historia, a partir del esfuerzo colectivo humano dentro de los contextos sociales y culturales, y que constituye la experiencia acumulada por el pensamiento matemático de la humanidad a lo largo de los siglos. Desde la primera de estas dos posturas, notemos que es precisamente la pureza inmaculada, abstracta e independiente de las matemáticas lo que ha sido su atractivo para muchos matemáticos, lo cual es válido desde un punto de vista estético y emocional.

Sin embargo, desde esta postura epistemológica racionalista, donde las matemáticas están constituidas por un conjunto de verdades objetivas, atemporales y abstractas, las matemáticas se representan de manera intrínseca desde una postura dogmática y aproblemática (Radford, 2016), es decir, como un conjunto de teoremas o productos dogmáticos, cerrados, acabados, inmutables, que no muestra el dinamismo de su surgimiento ni los problemas que generaron su construcción. O sea, se muestra su desarrollo de manera lineal y acumulativa, ignorando las crisis y los cambios y transformaciones profundos que sufrieron sus teorías y conceptos a lo largo de la historia, a partir de sus contradicciones intrínsecas. Este enfoque esconde toda la lucha y oculta la aventura. Toda la historia se pierde, todos los intentos fallidos y las formulaciones tentativas para probar un teorema se condenan al olvido, mientras que el resultado final se destaca (Kline, 1978).

Además, se la presenta descontextualizada, como una ciencia socialmente neutra, alejada de los problemas del mundo, ignorando sus aplicaciones y sus complejas interacciones con las otras ciencias, la tecnología, la cultura y la sociedad. Esto también trae como consecuencia que se le presente como obra de genios aislados, reservado a minorías especialmente dotadas, ignorando el papel del trabajo colectivo de generaciones y de grupos de matemáticos, escondiendo los significados de este conocimiento, es decir, que se le presente con una visión individualista y elitista (González, 2004).

Luego, teniendo en cuenta todo lo anterior, en este trabajo se propone realizar una reflexión sobre esta contradicción, sugiriendo, al mismo tiempo, algunas ideas sobre cómo podría incorporarse recursos didácticos dentro y fuera de las salas de clases que ayuden a cambiar la percepción que se tiene en la sociedad actual sobre las matemáticas.

2. METODOLOGÍA

Para realizar nuestra reflexión nos basaremos en el método histórico-lógico (Pérez-Rodríguez, 1997) y en la perspectiva sociocultural de Vygotsky (1989), por lo que nuestro enfoque considerará los supuestos ontológicos del constructivismo social como filosofía de las matemáticas (Ernest, 1991), que implican que los objetos matemáticos deben ser considerados como símbolos de unidades culturales, emergentes de un sistema de usos ligados a las actividades matemáticas que realizan grupos humanos y que, por tanto, también evolucionan con el transcurrir del tiempo.

Según la perspectiva sociocultural, lo que determina el emerger progresivo de los objetos matemáticos son las prácticas que, en el seno de ciertas instituciones sociales, se realizan (Ernest, 2006). De esta manera, los significados de dichos objetos están estrechamente relacionados con los problemas afrontados históricamente y las actividades realizadas por los individuos en cada contexto y en el devenir del tiempo, no pudiéndose reducir el significado de un objeto matemático a su mera definición matemática. De manera que los distintos significados que emergen en este contexto son derivados de la actividad matemática a lo largo de la historia.

A partir del método de análisis histórico-lógico que se puede aplicar al nivel del pensamiento teórico, y cuya esencia es fundamentalmente dialéctica, intentaremos realizar aportes a la reflexión planteada como objetivo de investigación al final de la introducción. Este método se nutre de dos planos simultáneamente; del plano del desarrollo lógico dialéctico y del plano del desarrollo histórico real. Lo lógico se ocupa de investigar las leyes generales del funcionamiento y desarrollo de un fenómeno, estudia su esencia. Lo histórico está relacionado con la trayectoria real del fenómeno y los acontecimientos a lo largo de un período de la historia. Este método se realiza como resultado de la unidad dialéctica de ambos planos, que se complementan y se vinculan mutuamente. Para poder descubrir las leyes fundamentales por las que se rige un fenómeno, el método lógico debe basarse en los datos que proporciona el método histórico, de manera que no constituya un mero razonamiento especulativo. De manera similar, lo histórico no debe solo limitarse a la simple descripción de los hechos, sino también debe descubrir la lógica objetiva del desarrollo histórico de la investigación (Pérez-Rodríguez, 1997).

Este método se utiliza para determinar tendencias, etapas significativas y conexiones históricas fundamentales de forma cronológica y lógica. Implica el estudio de la evolución de un fenómeno, sus cualidades y sus variaciones asociadas a los nodos del conocimiento que persigue la investigación, y que conducen a la comprensión de sus leyes de desarrollo internas y su causalidad; sus aspectos más importantes, su esencia y sus conexiones fundamentales mediante la lógica interna de su desarrollo.

3. ANÁLISIS Y RESULTADOS

Para comenzar nuestro análisis, notemos que para darnos cuenta de la inseparabilidad de lo lógico y lo histórico en nuestro caso, se requiere el conocimiento de los hechos fundamentales en la historia de las matemáticas y de sus trabajos clásicos en los distintos contextos sociales, la comprensión de las leyes de su desarrollo y del carácter histórico de la correspondencia entre las distintas disciplinas matemáticas. Esta exigencia es apoyada además por el ejemplo de matemáticos notables a lo largo de la historia, cuya actividad en ramas concretas de las matemáticas, se conjugó con valiosas investigaciones de problemas históricos (ver, por ejemplo, Alexandrov, Kolmogorov y Youschkevitsch, 1981; Bolzano, 1991; Kline, 1978; Ríbnikov, 1987; Toeplitz, 1963; Weyl, 1949). En esencia, es natural que un matemático que trabaje creativamente en matemáticas se dedique a su historia. A pesar de esto, no se reconoce de manera general su valor para la enseñanza. Y una manifestación de este hecho, es que la historia de las matemáticas en sí no recibe mención en muchos de los programas de enseñanza de las matemáticas de nuestra región.

Este fenómeno es una de las posibles causas subyacentes a la contradicción ya enunciada en la introducción y está estrechamente relacionada con la postura epistemológica racionalista que muchos matemáticos y educadores matemáticos tienen en la actualidad. Sin embargo, desde la perspectiva sociocultural de Vygotsky (1984), esta postura racionalista representa una percepción sesgada de nuestra experiencia. Una visión que considera que las matemáticas se han desarrollado a través de la historia, a partir del esfuerzo y las interacciones dialécticas de colectivos humanos dentro de los contextos sociales y culturales, es mucho más razonable según nuestro criterio, y mucho más efectivo dentro de la sala de clases para generar interés por su estudio.

Por otra parte, como plantea Morris Kline (1978) en su famosa obra *El Fracaso de la Matemática Moderna*, esta forma de enseñar tuvo su origen en el desarrollo de las escuelas de pensamiento matemático que dieron paso al formalismo del grupo Bourbaki a principios de la década de los años 40 del siglo pasado y que tiene su influencia hasta hoy, propiciando esta tendencia a despreciar el uso de factores históricos en la enseñanza, a pesar de que sus consecuencias nefastas para la enseñanza son ampliamente conocidas.

Pero también hay otros factores que influyen en la poca inclusión de la historia en la educación matemática. Hacer uso de la historia es difícil para los estudiantes, cuyo marco histórico y sentido del pasado puede ser muy errático y fragmentado, si es que existe; y también es difícil para los profesores, que por lo general han aprendido poco o nada de historia de las matemáticas durante su formación, y mucho menos han recibido formación sobre cómo utilizar la historia en sus clases.

Además, algunos científicos solo reconocen el lado cultural del estudio de la historia de las matemáticas (Gnedenko, 1963). En su opinión, los nuevos conocimientos no tienen relación con el pasado, el pasado solo puede impedir el progreso y las antiguas teorías están desactualizadas. Esta visión de las matemáticas establece que el progreso sólo se logra con nuevas ideas, y que el estudio del pasado no es necesario en el estudio de las matemáticas.

Sin embargo, las antiguas teorías no solo tienen un valor cultural e histórico, sino que también juegan un papel importante para el desarrollo de la ciencia contemporánea. Así, las características de las matemáticas contemporáneas sólo pueden entenderse como consecuencia y desarrollo de las teorías matemáticas del pasado. Un ejemplo es cómo el quinto postulado de Euclides allanó el camino hacia las nuevas geometrías no euclidianas que, a su vez, formaron la base para crear construcciones matemáticas más abstractas y los sistemas de deducción axiomática que hoy estudiamos (Stillwell, 2010). Otro ejemplo lo constituye el desarrollo de la teoría de la medida y la integración, que tiene raíces profundas en el método exhaustivo griego desarrollado en la antigua Grecia (Ribnikov, 1987). Pero como estos, hay muchísimos más ejemplos en cualquier área de las matemáticas que examinemos. ¿Cuántas veces no ha sucedido que se encuentra una idea inspiradora para resolver un problema de investigación en el que se está trabajando, a partir de la revisión histórica de un determinado tema? En esencia, para conocer y apreciar las matemáticas, es necesario conocer su historia y es preciso reconocer que el progreso de las matemáticas, así como el de cualquier otra ciencia, se construye sobre la base del trabajo colectivo y los logros acumulativos de quienes vinieron antes. Es por esta razón que, por ejemplo, Newton expresó, metafóricamente, que había visto más lejos que otros porque se había parado sobre hombros de gigantes (Newton, 1978).

Siguiendo esta misma dirección, en las últimas décadas se han escrito muchos artículos valiosos e interesantes explorando los argumentos que justifican el uso de la historia de las matemáticas dentro y fuera de la sala de clases (Goktepe y Ozdemir, 2013). Por ejemplo, la *Mathematical Association of America*, llevó a cabo una labor muy valiosa en este sentido cuando publicó una edición de artículos de profesores con el título *Historical Topics for the Mathematical Classroom* (Baumgart et al., 1989) y cuando fundó el *Institute in the History of Mathematics and Its Use in Teaching* (IHTM) en 1995. En la reunión del *International Congress of Mathematical Education* (ICME) en 1996, se hizo hincapié en la importancia de la historia de las matemáticas en la motivación de la atención de los estudiantes y el uso de las matemáticas en las actividades de enseñanza. Además, en el *Internacional Congress on Mathematical Education* (ICTM-2) en 2002 se organizó un panel especial con el título *El papel de la historia de las matemáticas en la educación matemática*.

También existen varias revistas especializadas en matemática educativa que, desde hace varios años, vienen publicando diversas reflexiones sobre la historia como elemento motivador en el aprendizaje de las matemáticas y sobre el papel de la historia en la concepción que se tiene sobre las matemáticas (ver, por ejemplo, Fauvel y van Maanen, 2000; Furinghetti, 1997; Hitchcock, 1997). En esta misma dirección se han publicado libros como *Using History to Teach Mathematics: An International Perspective* (Katz, 2000). Por otra parte, la comunidad académica matemática realiza con regularidad eventos como los *European Summer University on History and Epistemology in Mathematics Education* (1993, 1996, 1999, 2004, 2007, 2010, 2015, 2018, 2022) y como los *Congresos Iberoamericanos de Historia de la Educación Matemática* (2011, 2013, 2015, 2017, 2019, 2021, 2023) donde se discuten estos temas. Otro ejemplo significativo, es la experiencia de la enseñanza del Análisis Matemático I en la Licenciatura en Matemática de la Universidad de la Habana, con un enfoque histórico-problémico, que se viene implementando desde el año 2007 (Valdés y Sánchez, 2011).

Son muchos los estudios que se han realizado y que promueven el uso de la historia en las clases de matemáticas y señalan las ventajas que aporta (Burns, 2010; Kaye, 2008; Lawrence, 2009). Por ejemplo, Wilson y Chauvot (2000) postulan que su integración en la enseñanza agudiza las habilidades de resolución de problemas, sienta las bases para una mejor comprensión de los contenidos, ayuda a los estudiantes a establecer diferentes conexiones matemáticas e ilumina la conexión entre las matemáticas y la sociedad.

De hecho, la idea de utilizar la historia de las matemáticas en la educación matemática no es nueva. Hace más de un siglo, Zeuthen (Furinghetti y Radford, 2002) escribió un libro sobre la historia de las matemáticas dirigido a profesores donde sostenía que la historia de las matemáticas debía ser una parte integral de su educación general. En 1894, Cajori también señaló que la historia de las matemáticas podía ser una fuente inspiradora para los profesores (Karaduman, 2010). Freudenthal (1981) también afirmó que la introducción de la historia en la formación de los profesores de matemáticas proporcionaba una base para sus conocimientos matemáticos.

Luego, la teoría y la práctica nos enseñan que es necesario mostrar a los estudiantes que todo el orden lógico de las matemáticas, su estructura, la interrelación e incluso el origen y la existencia de sus ramas independientes, no constituye algo inmutable, sino que son frutos de su evolución como conocimiento encarnado en su contexto sociocultural y su desarrollo histórico. Y esta evolución y desarrollo no siempre fueron procesos armoniosos, continuos y graduales, y en numerosas ocasiones se produjeron mediante una ardua lucha llena de contradicciones entre teorías nuevas y viejas. Recordemos, por ejemplo, la tenaz resistencia que, durante mucho tiempo, provocó en los principales matemáticos de la época, las nociones fundamentales de la Teoría de Conjuntos de Cantor a finales del siglo XIX (Arrigo y D'Amore, 1999).

Además, la comparación de los métodos, conceptos y procedimientos antiguos y la exposición de problemas aún abiertos y no resueltos, en comparación con las técnicas modernas, mostrando además sus desarrollos epistemológicos y estimulando a la vez la creatividad, el interés, el espíritu investigador y el entusiasmo de los estudiantes por las matemáticas, puede contribuir a darle a las matemáticas un rostro humano, cambiándose así la percepción que se tiene sobre éstas (Bidwell, 1993; Marshall y Rich, 2000).

Por otra parte, el estudio del desarrollo histórico de las matemáticas desde una perspectiva sociocultural ayuda a mostrar a los alumnos cómo los diferentes conceptos evolucionaron a lo largo de los sucesivos períodos de su concepción, exponiendo los obstáculos y dificultades a los que se enfrentaron los matemáticos del pasado. Al mismo tiempo, puede servir al docente como guía a través de las dificultades a las que se enfrentan los alumnos al aprender un determinado tema matemático. Esas dificultades son a menudo similares a las que se encontraron a través del desarrollo histórico de ciertos conceptos (Díaz-Chang y Arredondo, 2023).

En esta dirección, los estudios histórico-epistemológicos que abundan en la literatura de la matemática educativa sobre temas concretos del currículo matemático son de gran ayuda. Existen numerosos estudios que apoyan lo anterior, más allá de nuestra experiencia en las salas de clases, y que muestran la utilidad de proporcionar introducciones históricas a conceptos nuevos (ver, por ejemplo, Díaz-Chang y Arredondo, 2021; Radford, 2016), animando a los estudiantes a comprender los problemas históricos a los que responden los conceptos que están aprendiendo y a explorar sus intuiciones incorrectas y conceptos erróneos, los errores cometidos por matemáticos de generaciones anteriores, los puntos de vista alternativos del pasado y sus contradicciones de carácter dialéctico.

Al mismo tiempo, la evidencia que estos estudios proporcionan ayuda a los estudiantes a darse cuenta de que no han sido los primeros ni los únicos que han tenido esos problemas. Desde esta mirada es mucho más comprensible y natural para ellos el cometer errores, los ayuda a comprender que muchas veces, éstos tienen origen en percepciones, intuiciones y preconcepciones, permitiéndoles reflexionar en la relatividad de ciertos conceptos y nociones en contextos matemáticos específicos, por lo que cometer errores se vuelve parte natural del proceso de aprendizaje.

Además, un componente histórico adecuadamente diseñado podría hacer cautivador y enriquecer culturalmente el discurso matemático, fuera y dentro de las salas de clases y, en consecuencia, podría ser un recurso didáctico de gran valor en la resolución del conflicto que nos impone nuestra reflexión sobre la ya mencionada contradicción. Esto proporcionaría a niños y jóvenes una visión dinámica y viva de las matemáticas, en estrecha relación con su contexto, su medio sociocultural. Les permitiría conocer los problemas de la vida real que dieron lugar a los diversos conceptos, su epistemología, las intuiciones e ideas de donde surgieron, el origen de ciertos términos, las dificultades que involucraron, las cuestiones prácticas que resolvieron, el contexto social, cultural y temporal en el que aparecieron, el proceso de evolución hasta su estado actual, lo que los ayudaría a identificarse con la teoría y a desarrollar la apreciación y el disfrute de las matemáticas. Y esto podría implementarse también fuera de la escuela, en contextos sociales más amplios, que convoquen a la comunidad en general, generando una transformación positiva en la sociedad de la percepción que se tiene de las matemáticas.

En relación con lo anterior, numerosos estudios señalan que, en el proceso de enseñanza, se debe prestar especial atención al desarrollo de actitudes y emociones positivas de los estudiantes hacia las matemáticas (Ma y Kishor, 1997, Akinsola y Olowojaiye, 2008, Memnun y Akkaya, 2012). En consecuencia, la enseñanza de las matemáticas debe organizarse en un entorno que propicie estas actitudes positivas. En este sentido, la introducción de la historia en la enseñanza, según nuestra perspectiva, constituye una herramienta efectiva en el descubrimiento del encanto, el goce, el placer estético y la belleza dinámica de las matemáticas.

Además de todo lo expuesto anteriormente, la introducción de la historia en la sala de clases también podría ayudar a contextualizar los estudios matemáticos en varias direcciones, desarrollando en los estudiantes la comprensión del papel que han desempeñado y seguirán desempeñando las matemáticas, tanto en el desarrollo de la ciencia y la tecnología, como en el de nuestra civilización. A estos se le puede agregar la necesidad que existe de dar una perspectiva histórica a los estudios culturales de las matemáticas, de generar discusiones sobre el papel de las matemáticas en la sociedad y otros debates por el estilo. Un ejemplo de esto podría ser un debate sobre el uso de la teoría de las matemáticas electorales en las elecciones. Otro ejemplo sería debatir sobre cómo funcionan las matemáticas en la bolsa de valores. También se podría discutir sobre cómo el surgimiento de la perspectiva caballera en la pintura del renacimiento generó un desarrollo de la geometría, o sobre la importancia de utilizar en la sociedad actual las habilidades cognitivas que la práctica y el ejercicio de las matemáticas desarrollan en un individuo.

También la historia podría ser muy útil para implementar un enfoque inclusivo y multicultural y ayudar a los estudiantes de diversos orígenes a alcanzar todo su potencial, a través de la apreciación de las diversas raíces culturales de las matemáticas en distintas épocas. En relación con lo anterior, también sería pertinente cuando se considerasen cuestiones de género, pues permitiría mostrar los logros principales de las mujeres matemáticas más importantes a lo largo de la historia, estimulando así a las niñas y adolescentes a continuar desarrollando su máximo potencial matemático.

En este mismo sentido, también podría ayudar a desarrollar una actitud crítica hacia la sociedad actual y hacia los prejuicios de género que existen en relación con las matemáticas y otras disciplinas científicas. Por ejemplo, en Cortéz y Hersant (2016) se muestran las dificultades que las féminas deben superar para insertarse en la carrera académica matemática en la actualidad, a través de una revisión de las teorías feministas que se desarrollaron a lo largo de la historia de las ciencias. Otro ejemplo es el reporte del Instituto Internacional para la Educación Superior en América Latina y el Caribe (IESALC) (2020) sobre las mujeres en la educación superior, donde se discute sobre el estado inadecuado de la igualdad de género en la educación matemática a partir de algunos trabajos de investigación en historia de las matemáticas. Todos estos temas críticos de la sociedad actual podrían ser promovidos en la enseñanza mediante el uso de perspectivas históricas.

Sin dudas, las matemáticas como ciencia es una forma de conciencia social. Por esto, a pesar de su conocida singularidad, las leyes que rigen su desarrollo, en lo fundamental, son las mismas que rigen todas las formas de conciencia social (Vygotsky, 1984). Por lo tanto, el uso de la historia de las matemáticas también ayuda a formar esa conciencia social en nuestros estudiantes, además que les ayuda a desarrollar el espíritu crítico, reflexivo, la autonomía e independencia, la capacidad de cuestionarlo todo, tan necesaria en el contexto del mundo actual. Además, les ayuda a comprender que estas habilidades pueden tener un impacto social, a través del ejemplo de las vidas de matemáticos de generaciones anteriores, de sus luchas y sus experiencias en contextos similares.

4. CONSIDERACIONES FINALES

De acuerdo a la línea general de nuestro análisis, se podría introducir un gran número de acciones para contribuir a hacer cautivador el discurso matemático: diseñar problemas utilizando textos matemáticos antiguos, desarrollar ciclos de charlas divulgativas y proyectos escolares sobre la actividad matemática local del pasado o de una determinada cultura, utilizar la teoría para modelar problemas locales prácticos de la vida real de forma similar a como lo hicieron matemáticos del pasado, diseñar el enfoque didáctico de un tema en sintonía con su desarrollo histórico, programar el orden y la estructuración de los temas dentro del programa de estudios y el currículo sobre bases históricamente informadas, usar problemas y ejemplos críticos de épocas anteriores para ilustrar técnicas o métodos que permiten resolver problemas actuales, presentar la evolución de algunas teorías y conceptos a través de las controversias y puntos de vistas contradictorios que surgieron a lo largo de la historia a partir de su desarrollo dialéctico, realizar charlas divulgativas que muestren la relación de las matemáticas con el surgimiento de otras ciencias, con el arte, la inteligencia artificial, la realidad virtual y la tecnología desde la interdisciplina, entre muchas otras.

Por otra parte, la proposición y estudio de problemas basados en su evolución histórica solo podría ser efectiva para estimular los procesos de aprendizaje en los estudiantes, mediante la actividad mediadora del profesor. Desde este punto de vista, la historia de las matemáticas le permite al profesor comprender los límites dentro de los cuales los problemas matemáticos pueden ser formulados, así como el proceso mediador necesario para que el estudiante se vuelva creativamente consciente de formas teóricas de pensar matemáticamente.

En este contexto, se entiende que todo esto también implica un proceso de aprendizaje para los docentes que puede conducir a una nueva comprensión de los conceptos y sobre las prácticas en las que se subsumen estos conceptos, los valores que estos conceptos transmiten y las formas de actuar y reflexionar que engloban y dotan de significado a los conceptos matemáticos. De acuerdo con Vygotsky, el reconocimiento de conceptos históricos tiene lugar en la actividad humana involucrando distintos signos y herramientas, en un movimiento dialéctico entre procesos inter e intrapsíquicos (Vytgotsky, 1984) y resulta en la producción de sentido que se relaciona con un cambio de motivación en la actividad desarrollada por los individuos, basada en ciertas necesidades (Leontiev, 1983). La relación entre este proceso de aprendizaje de los profesores y el proceso de toma de conciencia de los significados matemáticos determinados por su contexto cultural, implica la transformación del sentido y, por tanto, la transformación de las necesidades en la actividad docente de los profesores.

Por tanto, creemos que en la formación del profesorado se debe incluir también la formación en los posibles usos de la historia de las matemáticas para la enseñanza de diferentes conceptos, temas y de acuerdo con los distintos niveles y rangos de habilidades. Una sugerencia sería ayudarlos en el diseño didáctico de los cursos incorporando estos recursos y a través de cursos y talleres, orientarles sobre cuáles lecturas históricas, qué ejemplos y qué otras actividades serían adecuadas para el aprendizaje en relación con un determinado tema a un nivel específico. Además, se debería fomentar la implementación de experiencias prácticas, basadas en la literatura, que destacaran cómo esta incorporación a las actividades de clases podría hacer que la enseñanza de ciertos temas fuera un poco más fácil, cómo el trabajo adicional que puede implicar al principio tendría una recompensa a largo plazo, a través del cambio en la percepción del estudiantado hacia las matemáticas, provocando actitudes positivas y estimulando los procesos de aprendizaje.

La introducción de la historia fuera y dentro de la sala de clases según nuestra perspectiva, también nos permitiría mejorar la calidad de la transmisión de los conocimientos matemáticos y proporcionaría una perspectiva global y humana de este conocimiento, que no solo relacionaría las líneas centrales del pensamiento matemático entre sí, sino que también mostraría su conexión con las diferentes líneas del desarrollo sociocultural y del pensamiento humano de diferentes lugares y épocas, de acuerdo con una concepción dialéctica del conocimiento.

En resumen, para generar el profundo cambio que tanto se necesita en la sociedad actual sobre la percepción que se tiene de las matemáticas, creemos que es preciso desarrollar conciencia, sobre todo en los más jóvenes, de la conocida relación que las matemáticas tiene con todas las demás ciencias, la tecnología y el arte, además de sus vínculos con todos los campos del quehacer humano, que hacen de esta ciencia una manifestación de la cognición humana que, a lo largo de la historia en todos los confines del planeta, forma la esencia y la base de nuestra cultura, de nuestra civilización, desde las más remotas épocas del mundo antiguo hasta la era tecnológica del mundo en que vivimos hoy.

Esperamos que el análisis realizado haya sido instrumental en el necesario proceso de reflexión que indujo la contradicción que se planteó en la introducción, contribuyendo así al desarrollo de una postura más sólidamente basada en la realidad y en nuestra naturaleza como seres socioculturales, que defiende la incorporación de las matemáticas en la vida diaria y de su historia como recurso didáctico en los procesos de enseñanza y aprendizaje y de divulgación de esta ciencia y creando así, tanto entornos educativos matemáticos de mayor riqueza desde el punto de vista humano, social y cultural, como entornos humanos, sociales y culturales más matemáticamente educados.

REFERENCIAS

[1] Akinsola, M.K., Olowojaiye, F.B. (2008) Teacher instructional methods and student attitudes towards mathematics. *International Electronic Journal of Mathematics Education*.

[2] Alexandrov, P.S., Kolmogorov, A.P., Youschkevitsch, A. (1981) A.N Markushevich as a historian of mathematics. *Historia Mathematica*, 8(2).

[3] Arrigo, G., D'Amore, B. (1999). Lo veo, pero no lo creo: obstáculos epistemológicos y didácticos para la comprensión del infinito actual. *Educación Matemática*, 11(01), 5-24.

[4] Baumgart, J.K., Deal, D.E., Vogeli, B.R., Hallerberg, A.E., Eds., (1989). Historical Topics for the Mathematics Classroom. *The National Council of Teachers of Mathematics*, Inc. 1906 Association Drive, Reston, Virginia, 20191(800), 235-7566.

[5] Bell, E. T. (2003). *The Development of Mathematics*. Dover Publications.

[6] Bidwell, J.K. (1993). Humanize Your Classroom with The History of Mathematics. *Mathematics Teacher*, 86, 461-464.

[7] Bolzano, B. (1991). *Las paradojas del infinito*. D.F., México: Universidad Nacional Autónoma de México.

[8] Burns, B.A. (2010) Pre-service teachers' exposure to using the history of mathematics to enhance their teaching of high school mathematics. *Issues in the Undergraduate Mathematics Preparation of School Teachers: The Journal*, 4, 1-9.

[9] Cortéz, M.I., Hersant, J. (2016). Femmes et mathématiques au Chili. *Synergies Chili*, 12(12), 59-71.

[10] Díaz-Chang, T., Arredondo, E-H. (2023). Exploring the relationship between tacit models and mathematical infinity through history. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 18 (2), 1-11.

[11] Díaz-Chang, T., Arredondo, E-H. (2021). Del infinito potencial al actual: un recorrido histórico a través de la metáfora conceptual. *Revista Paradigma*, 42(1).

[12] Ernest, P. (2006). A semiotic perspective of mathematical activity. *Educational Studies in Mathematics*, 61, 67-101.

[13] Ernest, P. (1991). *The philosophy of mathematics education*. Londres: Falmer Press.

[14] Fauvel, J., Van Maanen, J. (1997). The Role of the History of Mathematics in the Teaching and Learning of Mathematics: Discussion Document for an ICMI Study (1997-2000). *Educational Studies in Mathematics*, 34(3), 255–259.

[15] Freudenthal, H. (1981). Major Problems of Mathematics Education. *Educational Studies in Mathematics*, 12(2), 133–150.

[16] Furinghetti, F. (1997). History of Mathematics, Mathematics Education, School Practice: Case Studies in Linking Different Domains. *For the Learning of Mathematics*, 17(1), 55–61.

[17] Furinghetti, F., Radford, L. (2002) Historical conceptual developments and the teaching of mathematics: From phylogenesis and ontogenesis theory to classroom practice. in: English D.L. [ed.] *Handbook of International Research in Mathematics Education*, Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum, 631-654.

[18] Gnedenko, B.V. (1996) *Uvod u struku matematika*. Kragujevac: DSP-Mecatronic

[19] González, P. M. (2004). La historia de las matemáticas como recurso didáctico e instrumento para enriquecer culturalmente su enseñanza. *Revista Suma*, 45, 17-28.

[20] Goktepe, S., Ozdemir, A.S. (2013) An example of using history of mathematics in classes. *European Journal of Science and Mathematics Education*, 1, (3), 125-136.

[21] Hitchcock, G. (1997). Teaching the Negatives, 1870-1970: A Medley of Models. *For the Learning of Mathematics*, 17, 17-25.

[22] Karaduman, G. B. (2010). A sample study for classroom teachers addressing the importance of utilizing the history of math in math education. *Procedia Social and Behavioral Sciences*, Elsevier, 2, 2689–2693.

[23] Katz, V. (2000). *Using History to Teach Mathematics: An International Perspective*. Cambridge University Press.

[24] Kaye, E. (2008) The aims of and responses to a history of mathematics videoconferencing project for schools. *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*, London, British Society for Research into Learning Mathematics, Joubert M., 28(3), 66-71.

[25] Kline, M. (1978) *El fracaso de la Matemática moderna*. Editora Siglo XXI, Madrid.

[26] Lawrence, S. (2009) What works in the classroom project on the history of mathematics and the collaborative teaching practice. in: CERME 6, Lyon, France, September 12th 2014, http://ife.ens-lyon.fr/publications/edition-electronique/cerme6/wg15-08-lawrence

[27] Leontiev, A. N. (1983). *Actividad, Conciencia y Personalidad*. Ciudad de La Habana: Editorial Pueblo y Educación.

[28] Ma, X., Kishor, N. (1997) Assessing the Relationship between Attitude toward Mathematics and Achievement in Mathematics: A Meta-Analysis. *Journal for Research in Mathematics Education*, 28(1): 26.

[29] Marshall, G. L., Rich, B. S. (2000). The Role of History in a Mathematics Class. *The Mathematics Teacher*, 93(8), 704-706.

[30] Memnun, D.S., Akkaya, R. (2012) Pre-service teachers' attitudes toward mathematics in Turkey. *International Journal of Humanities and Social Science*, 2, (9), 90-99.

[31] Newton, I. (1978). *The Correspondence of Isaac Newton*. (A. R. Hall & L. Tilling, Eds.). Cambridge: Cambridge University Press.

[32] Pérez-Rodríguez, G. (1997). *Metodología de la investigación educacional.* Ciudad de La Habana: Editorial Pueblo y Educación.

[33] Radford, L. (2016). Towards a culturally meaningful history of concepts and the organization of mathematics teaching activity. In Radford, L., Furinghetti, F., & Hausberger, T. (Eds.), *Proceedings of the 2016 ICME Satellite Meeting of the International Study Group on the Relations Between the History and Pedagogy of Mathematics* (pp. 503-512). Montpellier, France: IREM de Montpellier.

[34] Ribnikov, K. (1991). *Historia de las matemáticas*. Editorial MIR, Moscú.

[35] Sánchez, C. (2013). ¿Cómo hacer apetitoso el discurso matemático? Experiencias con sabor cubano. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 8(11), 207-218.

[36] Toeplitz, O. (1963) *The Calculus, a Genetic Approach*. University of Chicago Press.

[37] IESALC (2020). *Hacia el acceso universal a la educación superior: tendencias internacionales*. Reporte del Instituto Internacional para la Educación Superior en América Latina y el Caribe. https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000375683

[38] Valdés, C., Sánchez, C. (2011). Historia y rigor en una iniciación al cálculo: una experiencia cubana. *Educação Matemática Pesquisa*, 13(3), 581-596.

[39] Vygotsky, L. S. (1984). *A formação social da mente*. São Paulo: Martins Fontes.

[40] Vygotsky, L. S. (1989). *Pensamento e Linguagem*. São Paulo: Martins Fontes.

[41] Weyl, H. (1949) *Philosophy of Mathematics and Natural Science*. Princeton University Press.

[42] Wilson, P. S., & Chauvot, J. B. (2000). Sound Off!: Who? How? What? A Strategy for Using History to Teach Mathematics. *The Mathematics Teacher*, 93(8), 642-645.

Capítulo 9

Explorando conexiones interdisciplinarias: el espacio de acción, producción y comunicación

Tamara Díaz-Chang

Resumen: Este trabajo se propone examinar los fundamentos teóricos del espacio de Acción, Producción y Comunicación como marco conceptual de la didáctica de las matemáticas, y las posibilidades que ofrece para articular y establecer conexiones con las metodologías y modelos teóricos de la neurociencia cognitiva, generando así un marco de investigación interdisciplinaria que permite abordar el estudio de mecanismos cognitivos inconscientes que se dan en el aprendizaje de las matemáticas. Para lograr este objetivo se realizó un análisis crítico de la literatura, que nos permitió hallar relaciones entre las principales nociones y supuestos teóricos y combinar distintas perspectivas y diferentes resultados, provenientes de la didáctica de las matemáticas y de la neurociencia cognitiva, con relación a estos mecanismos cognitivos inconscientes.

Palabras clave: Mecanismos cognitivos inconscientes, Imágenes-esquemas, Neurociencia cognitiva.

1. INTRODUCCIÓN

Algunas de las dificultades a las que se enfrentan los estudiantes a la hora de aprender conceptos matemáticos se derivan de procesos cognitivos inconscientes que influyen en su razonamiento sin que estos sean conscientes o regulados. De hecho, las investigaciones en neurociencia sugieren que una parte significativa de nuestros procesos de pensamiento son inconscientes, es decir, inaccesibles para nosotros por medio de la conciencia introspectiva (Evans, 2008). En consecuencia, muchos de los mecanismos cognitivos que se desarrollan cuando estamos aprendiendo cualquier tema o concepto, ocurren sin nuestra comprensión consciente, y sin darnos cuenta de qué o cómo están sucediendo estos procesos (Weinberger & Green, 2022).

Estos mecanismos mentales ocultos pueden dificultar la capacidad de los estudiantes para comprender completamente nuevas ideas. Fishbein (2001) afirma que, en ocasiones, cuando se trata de comprender un concepto matemático demasiado complejo o abstracto, se tiende a utilizar inconscientemente representaciones mentales simplificadas, que en un principio podrían ayudar a comprender el concepto, pero que a la larga crean dificultades, impidiendo la formación de estructuras cognitivas más elaboradas que podrían conducir a las construcciones correctas requeridas en cada caso. Por lo tanto, el estudio de los mecanismos cognitivos inconscientes es un tema de investigación de interés en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (Rivas, Saiz & Ossa, 2022).

Sin embargo, los enfoques tradicionales en didáctica de las matemáticas tienden a examinar procesos de aprendizaje observables y conscientes, como las estrategias de resolución de problemas de los estudiantes, y no profundizan en los mecanismos inconscientes que dan forma a esas estrategias. Los procesos cognitivos que ocurren por debajo del nivel de conciencia, como el pensamiento intuitivo o los patrones de razonamiento implícitos, son difíciles de capturar con las herramientas de evaluación convencionales. Las pruebas y entrevistas que se realizan en la investigación educativa a menudo se basan en autoinformes o resultados observables, que pueden no proporcionar información sobre los factores inconscientes que influyen en el rendimiento de los estudiantes. Esto limita la capacidad de comprender completamente cómo los sesgos inconscientes, los conceptos erróneos intuitivos o los procesos de pensamiento automáticos, pueden estar influyendo en el aprendizaje de los estudiantes.

Por otra parte, es necesario recordar que, dada su naturaleza, la didáctica de las matemáticas es receptora de resultados provenientes de diferentes disciplinas que pueden enriquecer sus investigaciones. En el contexto actual, destacan, en especial, las investigaciones empíricas, teorías y metodologías de investigación que la neurociencia cognitiva puede aportar al desarrollo de las ciencias educativas (Pierre, 2008). Por lo tanto, las investigaciones en didáctica de las matemáticas podrían beneficiarse del desarrollo de marcos teóricos que se articulasen con estas metodologías, estableciendo así marcos interdisciplinarios de investigación que incorporasen las técnicas y los modelos teóricos de la neurociencia cognitiva para abordar el estudio de mecanismos cognitivos inconscientes en el aprendizaje (Valdés-Sosa, 2021). Esto permitiría obtener información complementaria sobre estos problemas complejos e incorporar los resultados de estas investigaciones en enfoques pedagógicos prácticos.

Por todo lo anterior, este trabajo se propone examinar los fundamentos teóricos del espacio de Acción, Producción y Comunicación (APC) (Arzarello & Sabena, 2014) como marco conceptual de la didáctica de las matemáticas, que permitirían propiciar este tipo de investigación interdisciplinaria en el estudio de procesos inconscientes en el aprendizaje de las matemáticas.

2. METODOLOGÍA

Para lograr este objetivo se realizó una revisión crítica de la literatura (Snyder, 2019). Este tipo de revisión crítica generalmente tiene como objetivo evaluar, criticar y sintetizar la literatura sobre un tema de investigación de manera que permita el surgimiento de nuevas teorías y perspectivas. La mayoría de las revisiones críticas de la literatura están destinadas a abordar temas o teorías establecidos, o nuevos y emergentes (McInnis, 2011). En este caso, el propósito de utilizar este método era tener una visión general de los fundamentos teóricos del espacio APC como marco conceptual y, potencialmente, ampliar estos fundamentos en relación con el tema específico que nos ocupaba, es decir, el desarrollo de un enfoque interdisciplinario que permitiese incorporar las técnicas y los modelos teóricos de la neurociencia cognitiva para abordar el estudio de mecanismos cognitivos inconscientes en el aprendizaje de las matemáticas. Por lo tanto, se examinó la emergencia de nuevos temas, con el propósito de crear conceptualizaciones iniciales o preliminares relevantes a incorporar dentro de este marco teórico.

Notemos que el objetivo general de este tipo de revisión integradora es analizar y examinar críticamente la literatura y hallar las relaciones entre las principales nociones y supuestos teóricos sobre un determinado tema, y este análisis requiere creatividad, ya que el propósito es combinar perspectivas y conocimientos de diferentes campos o tradiciones de investigación. Además, este método de revisión debe dar como resultado avances en el conocimiento y el desarrollo del marco teórico en cuestión, en lugar de ser una simple descripción general de un área de investigación. Es decir, no debe ser descriptivo o histórico, sino que debe generar preferiblemente nuevos supuestos teóricos dentro del marco conceptual bajo estudio (Torraco, 2005).

3. ANÁLISIS Y RESULTADOS

El análisis muestra que el enfoque APC está basado principalmente en dos supuestos teóricos complementarios: la perspectiva *multimodal* sobre la cognición y la comunicación, y la caracterización sociocultural de la actividad y el pensamiento humanos. Este enfoque teórico *multimodal* se deriva de la teoría cognitiva de la *Cognición Encarnada* (CE) (Rosch, Thompson, y Varela, 1991; Maturana y Varela, 1992), y fue introducido por Arzarello y sus colaboradores (2014), basado en los trabajos de Vygotsky y los resultados de las recientes investigaciones en neurociencia cognitiva.

Recordemos que el término de *multimodalidad* está planteado aquí desde el punto de vista de la neurociencia cognitiva, y se refiere al hecho de que no hay una única región específica del cerebro responsable de las distintas funciones cognitivas, ni del control de las diferentes áreas encargadas de diversas modalidades sensoriales. En vez de esto, lo que se tiene es la activación simultánea de múltiples regiones cerebrales, correspondientes a múltiples modalidades de expresión externa del individuo, que trabajan en conjunto, de forma integrada y complementaria, durante el desarrollo de los procesos sensoriales y cognitivos.

La noción de espacio APC considera las tres componentes fundamentales de la actividad matemática (o sea, acciones, producciones y comunicaciones) vista en su contexto sociocultural, o sea teniendo en cuenta la dimensión sociocultural de los procesos de enseñanza y aprendizaje. De esta manera el análisis se enfoca en las dinámicas que se desarrollan en los procesos de enseñanza y aprendizaje que se dan en un contexto sociocultural, dentro o fuera de la sala de clases, donde los aspectos cognitivos se interrelacionan con los didácticos y comunicativos.

Cabe destacar que este espacio se nutre teóricamente de los resultados de las investigaciones en psicología, desde una perspectiva semiótica, basada en el estudio de los signos de Vygotsky. Además, al constituir un enfoque *multimodal* se basa en la coexistencia mutua de una variedad de mecanismos cognitivos y perceptivos, tanto conscientes como inconscientes, tales como las experiencias de aprendizaje cinestésicas, y modalidades o recursos, como los signos, los gestos y la comunicación tanto oral como escrita, en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, y en general, en la formación de significados matemáticos. Por otra parte, dada la abrumadora riqueza de nuestra tecnología contemporánea (web, juegos, tabletas, etc.), y las posibilidades de desarrollo de interacción con ésta, este tipo de perspectivas *multimodales* del aprendizaje y de la comunicación, tienen una creciente relevancia en los procesos de formación de estos significados matemáticos.

Además, desde esta perspectiva *multimodal* las matemáticas constituyen un producto potente y estable de la creación humana, con origen último en la experiencia corpórea física, como Nemirovsky y Borba (2003) han expresado, enfatizando el rol de la acción perceptivo-motora en los procesos cognitivos: "*a pesar de estar modulados por cambios de atención, conciencia y estados emocionales, la comprensión y el pensamiento son actividades perceptivo-motoras; además, estas actividades se distribuyen corporalmente en diferentes áreas de percepción y acción motriz en función de cómo hemos aprendido y utilizado el tema en sí.* [*Como consecuencia,*] *la comprensión de un concepto matemático, más que tener una esencia definitoria, abarca diversas actividades perceptivo-motoras, que se vuelven más o menos activas según el contexto*" (p. 108).

En este caso, la atención a los aspectos corporizados y *multimodales* necesita llegar a un acuerdo con la consideración de los aspectos sociales, históricos y culturales en la génesis de los conceptos matemáticos (Schiralli y Sinclair 2003; Radford et al. 2005). Puesto que las matemáticas son de hecho "*inseparables de los instrumentos simbólicos*" y el acto del saber es un fenómeno "*culturalmente moldeado*" (Sfard y McClain 2002, págs. 156) en el que el uso de herramientas y signos juegan un papel importante.

Además, en esta génesis de conceptos matemáticos, intervienen procesos de idealización de la realidad corpórea, física, como los procesos de abstracción. En particular, los procesos de abstracción tienen un rol fundamental en la construcción de conceptos matemáticos (e.g. Dubinsky et al., 2005). La abstracción ha sido objeto de reflexiones sostenidas desde la época de Aristóteles (que la consideraba como un concepto definido por la omisión de sus atributos) (Aristóteles, trad. 1985), y varias ideas y teorías se han desarrollado al respecto a lo largo de la historia. Por ejemplo, para Demers, Miranda y Radford (2009) la abstracción, como mecanismo cognitivo, nos permite ir de casos particulares hacia la construcción de lo general, revelando patrones subyacentes en un concepto. Más allá de diferencias conceptuales, todas las teorías concuerdan en un punto: la abstracción no es un acto instantáneo, sino un proceso durante el cual, el estudiante moviliza las ideas ya adquiridas, y por medio del lenguaje, signos, representaciones y otros artefactos culturales, establece enlaces que no establecía antes, construyendo así un nuevo concepto matemático (Demers, Miranda y Radford, 2009).

Por otra parte, la noción de espacio APC se nutre especialmente de la teoría cognitiva de la Cognición Encarnada (CE). Esta teoría sugiere que existen modos alternativos de formalizar las ideas en general, y en particular, las ideas matemáticas, resaltando el papel relevante de diferentes modalidades sensoriales en los procesos de integración y abstracción, y en general, en la construcción de conceptos de lo simple a lo complejo (Rosch, Thompson, y Varela, 1991; Maturana y Varela, 1992; Wilson, 2002). Es una alternativa a las concepciones tradicionales de la cognición, que asumen que los individuos representan al mundo por medio de símbolos mentales abstractos, que manipulan para pensar (Michalak et al., 2012), y en vez de esto, propone que el cuerpo, más que actuar como un instrumento de percepción al servicio de la mente, funciona como un componente de ésta y, por lo tanto, está directamente involucrado en los procesos cognitivos. Desde esta perspectiva gran parte de la cognición se deriva y depende de las interacciones corporales del individuo con su medio (Barsalou, 2007), que es, por lo tanto, un elemento clave para explicar el desempeño de las funciones cognitivas. En este contexto, las experiencias corporales intervienen más allá de una primera fase del conocimiento, y, de hecho, permean todo el proceso de producción de éste.

Destaquemos también que la teoría CE surgió a partir de los resultados obtenidos por numerosos estudios conductuales y neurocientíficos en los años 90 del siglo pasado, y asume que el conocimiento y la experiencia se basan en sistemas sensoriales que subyacen a la percepción, sistemas motores en los que se basa la acción corporal y sistemas introspectivos que soportan experiencias conscientes como la emoción y la motivación, en estrecha relación con los procesos cognitivos (Niedenthal et al., 2005). Desde esta perspectiva, la interacción entre el cuerpo y la mente es el origen de la experiencia consciente en el momento presente. La actividad consciente, por tanto, se puede considerar desde este punto de vista como la capacidad intencional y progresiva de notar, diferenciar y modular estos procesos de interacción (Siegel, 2010). Como resultado de esto, las experiencias pasadas y las sensaciones en curso pueden interactuar entre sí (integrarse) y dar forma a la experiencia del momento presente. Por otra parte, la conciencia de señales corporales (llamada conciencia interoceptiva), es crucial para regular las emociones. De hecho, se ha demostrado que la conciencia interoceptiva facilita los procesos de conciencia y de identificación de estados emocionales y, por lo tanto, facilita la autorregulación de estados emocionales negativos (Füstös et al., 2012).

En esta misma dirección Varela, Thompson y Varela (2001) propusieron que estos procesos de autorregulación están involucrados en la cognición, por lo que un aspecto central de esta teoría es el acceso continuo a las sensaciones del momento presente, lo que permite la integración progresiva y continua de los procesos de interacción entre el cerebro y el cuerpo, que intervienen en los procesos cognitivos (Chiesa et al., 2013; Siegel, 2012).

De manera adicional, los experimentos neurocientíficos realizados recientemente, han mostrado que la integración de los procesos de interacción entre el cerebro y el cuerpo tiene lugar en la corteza prefrontal media, una importante región del cerebro que conecta al cuerpo propiamente dicho, con el tronco encefálico, el área límbica, y la información recibida del medio y por medio de la interacción con otras personas.

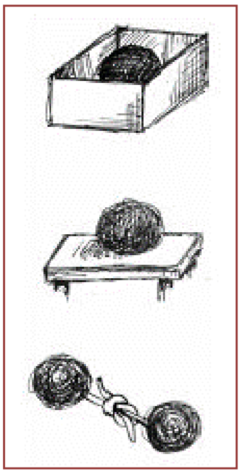
En resumen, podemos afirmar que la evidencia neurocientífica experimental recopilada en los últimos años soporta la noción de interrelación recíproca entre eventos neuronales y corporales, y la actividad consciente, que fue inicialmente propuesta por Varela y sus seguidores (Cunningham y Zelazo, 2007; Michalak et al., 2012). Sobre la base de estos resultados, Gallese y Lakoff (2005) brindan una nueva explicación teórica sobre el funcionamiento del cerebro, según el cual "la acción y la percepción se integran en el nivel del sistema sensorio-motor y no a través de áreas de asociación superiores" (p. 459). En particular, tal integración parecería ser crucial no solo para el control motor, sino también en la toma de decisiones, actividad clave que interviene en los procesos cognitivos.

En el contexto del estudio de mecanismos cognitivos que se dan en los procesos de aprendizaje y enseñanza de las matemáticas, la teoría de la CE fue desarrollada primeramente por Lakoff y Núñez (2000) incorporando los resultados de las investigaciones de la lingüística cognitiva (Lakoff y Johnson, 1980) y luego aplicada por otros investigadores como Arzarello y colaboradores en el estudio de estos procesos cognitivos (Arzarello, 2006; Arzarello et al., 2009).

En particular, Lakoff y Núñez postulan que las ideas matemáticas, incluso las más abstractas y sofisticadas, emergen, en parte, a partir de nuestras experiencias sensoriales, por medio de unas estructuras, la mayoría de las veces, inconscientes, llamadas *imágenes-esquemas*, que se transforman y evolucionan en el tiempo, por medio de asociaciones y mapeos metafóricos, constituyendo mecanismos esenciales de la cognición (Gerofsky, 2015).

De manera general, una *imagen-esquema* es una estructura recurrente inconsciente dentro de nuestros procesos cognitivos, que establece patrones de comprensión y razonamiento y que se forma a partir de nuestras interacciones corporales, nuestra experiencia lingüística y nuestro contexto histórico. Otra manera de describirlas es como generalizaciones mentales aprendidas de las experiencias moto-sensoriales del cuerpo, tales como las relaciones espaciotemporales genéricas, establecidas por la interacción repetida y la percepción, con y del medio (Mandler, 1992). Existen tanto en versión estática como dinámica, describiendo tanto estados, como procesos. En la siguiente Figura1 se muestran algunos ejemplos.

Figura 1. Ejemplos de imágenes-esquemas (de arriba hacia abajo: Contenedor, Soporte, Enlace)



Fuente: Hedblom (2020, p.55).

Inicialmente, estas estructuras fueron introducidas por Johnson (1987) en sus estudios cognitivos, describiéndolas como patrones dinámicos y recurrentes de nuestras interacciones perceptuales y programas motores, que dan coherencia y estructura a nuestra experiencia. Sin embargo, la noción de *imagen-esquema* no es nueva, fue incluso introducida por Kant en su *Crítica de la Razón Pura* (1781/2003). Desde la perspectiva de Kant la constitución arquitectónica de la mente humana, con su arsenal de conocimientos a priori y sus principios puros, nos provee como individuos solamente con algo que podría llamarse como el esquema puro de la experiencia posible. Para Kant este esquema es una especie de procedimiento analógico que revela el enlace entre lo sensual y lo intelectual en el curso de su ejecución empírica. Y este esquema debe ser por una parte intelectual, y de otra parte, del mundo sensible. Sin embargo, desde su punto de vista, una *imagen-esquema* no debe ser confundida con una imagen, es un método universal que puede ser repetido una y otra vez, y representa, de hecho, un principio de iteración que enlaza conocimiento y acción (Radford, 2005).

Desde su introducción, se han convertido en estructuras importantes para fundamentar fenómenos cognitivos superiores, como el lenguaje y el razonamiento, a partir de experiencias encarnadas adquiridas de forma motosensorial e inconsciente, dado que se pueden transformar y combinar para formar *imágenes-esquemas* más complejas. Desde este punto de vista, constituyen bloques de construcción conceptual que capturan la esencia de los conceptos, incluidos los abstractos (Hedblom, 2020) y sus propiedades ontológicas sirven para construir formalmente los significados subyacentes a estos conceptos (Kuhn, 2007). Para conocer una lista exhaustiva de las *imágenes-esquemas* más comunes, así como su descripción detallada, ver, por ejemplo, Johnson (1987) y Hampe (2005).

Durante el desarrollo de los mecanismos cognitivos que conllevan estos procesos de construcción conceptual y que pueden ser inconscientes, las *imágenes-esquemas* se combinan unas con otras, de diferentes maneras (Hedblom, 2020). En el contexto de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas que se dan en el espacio APC, estas *imágenes-esquemas* se consideran como estructuras pre-lingüísticas que se forman a partir de la experiencia corporizada, generando asociaciones, correspondencias y proyecciones entre dominios conceptuales diferentes, que pueden estar fuera o dentro de las matemáticas. Además, desde esta perspectiva teórica, estas *imágenes-esquemas* son patrones multimodales de experiencia dinámicos, incorporados a través del tiempo, que pueden derivar en mecanismos cognitivos que conducen a la elaboración de estructuras y conceptos abstractos dentro de las matemáticas (Arzarello et al., 2009).

Por ejemplo, la relación que existe entre estas estructuras de expresión pre-lingüística de conceptos matemáticos y su naturaleza sensorial e inconsciente, se puede ver a través de la etimología de los conceptos de ángulo y de circunferencia en el diccionario etimológico de Schwartzman (1994). Otro ejemplo que se da por Vita (1982), y se tiene para el concepto de punto, que es una abstracción de la huella cinestésica que deja un compás sobre una superficie. Otros trabajos muestran que la coordinación sensorial influye en el aprendizaje de conceptos geométricos, como el círculo o el rectángulo (Arzarello et al., 2008). Si se sigue un contorno redondo con la mano y después un contorno anguloso, se siente y se ve una diferencia. En el caso del círculo, la *imagen-esquema* que se forma a partir de esta experiencia sensorial, se especifica más tarde con el concepto de "objeto redondo", y se vuelve a continuación consciente y más abstracta o general, cuando se describe al círculo mediante una expresión lingüística que recalca su sentido métrico: "como el conjunto de los puntos que se encuentran a una misma distancia, *r*, de un punto fijo del plano" (su centro), o a través del simbolismo algebraico.

Luego, dados estos fundamentos teóricos, la noción de espacio APC constituye un marco teórico idóneo para el estudio de mecanismos cognitivos inconscientes que se dan durante el aprendizaje de conceptos matemáticos. Al mismo tiempo, al tener una concepción multimodal de la cognición basada en los resultados de las investigaciones en neurociencia cognitiva a través de la teoría de la CE, se convierte en una herramienta eficaz en la articulación de fundamentos teóricos de la didáctica de las matemáticas, con las metodologías, técnicas y modelos teóricos de la neurociencia cognitiva en el estudio de estos mecanismos cognitivos inconscientes.

4. CONSIDERACIONES FINALES

Una de las preocupaciones más antiguas en relación con la investigación y al modo en que el hombre accede al conocimiento y construye sus teorías, se encuentra en el famoso mito de la caverna formulado por Platón en el siglo V a.C. (Zamosc, 2017), cuya moraleja evidente es, que el filósofo o el científico, no debe fiarse de su experiencia a la hora de adquirir conocimientos sobre la naturaleza, o sobre sí mismo. Sin embargo, los empiristas ingleses del siglo XVIII consideraban exactamente lo contrario (Hume, 2007; Locke, 1997), de modo que este debate filosófico que continúa hasta nuestros días, ha estado en el centro de la constitución de diversas teorías, y en el fondo de las diversas posturas que hacia ésta han tenido los propios científicos, a lo largo de los siglos.

Desde el punto de vista conceptual, una teoría en didáctica de las matemáticas, en principio, pretende construir explicaciones teóricas, globales y coherentes que permitan entender el fenómeno educativo en lo general y que, al mismo tiempo, ayuden a resolver satisfactoriamente situaciones problemáticas particulares. Para lograr esto debe adaptar y desarrollar métodos de estudio y de investigación, así como encontrar formas propias, hipótesis de investigación, que le permitan contrastar los resultados teóricos con la realidad que éstos pretenden modelar. La didáctica de las matemáticas no difiere, en este sentido, de otras actividades científicas ni en sus propósitos ni en sus métodos y tendería a parecerse más a las ciencias empíricas que a las disciplinas especulativas.

Por otra parte, es importante tener en cuenta que las hipótesis de investigación en didáctica de las matemáticas están vinculadas a las teorías, o sea, al conjunto de soluciones preliminares que sobre un determinado ámbito de problemas se tiene, con cierto grado de generalidad. Los modelos y constructos actúan como herramientas teóricas que permiten conectar las hipótesis con las diversas teorías. Además, las teorías en didáctica de las matemáticas son receptoras de una amplia variedad de resultados que provienen de diferentes áreas del conocimiento. Notemos también que, como disciplina científica, se basa simultáneamente en la didáctica y en las matemáticas, dos áreas de estudio que parecen ser independientes y ajenas entre sí. En términos de actividad, esto significa que las preguntas de investigación dentro de una determinada teoría en didáctica de las matemáticas siempre están impregnadas de contenidos matemáticos, y que las cuestiones que se plantean sobre las matemáticas incluyen, de manera inherente, un interés didáctico. Esta característica la convierte de forma natural en una disciplina interdisciplinaria.

Sin duda, como disciplina científica, se presenta como un espacio de experimentación para evaluar muchas de las teorías generales derivadas del estudio de otras ciencias. Recordamos que, en los años setenta, las teorías del aprendizaje de la psicología conductista de Piaget (1998) influenciaron considerablemente el desarrollo de numerosas investigaciones en didáctica de las matemáticas, o cómo el acercamiento estructuralista en matemáticas dejó una fuerte huella en las salas de clase de la década de los sesenta (Kline, 1978). En este contexto, es importante señalar que, aunque cada disciplina busca autoafirmarse al identificar sus particularidades, con el fin de definir su propia identidad, también debe aclarar de manera precisa las relaciones que, por su naturaleza, puede establecer con teorías que surgen de otras disciplinas.

Con el tiempo, los temas de discusión han evolucionado, pasando de simplemente presentar resultados de estudios descriptivos a considerar y, en ocasiones, confrontar paradigmas, metodologías, nuevos marcos teóricos y buscar conexiones entre ellos. Muchos de estos esfuerzos para establecer las diversas teorías han buscado destacar las características que la distinguen de aquellas disciplinas que enriquecen sus investigaciones, como la pedagogía, la psicología, la lingüística, la sociología, las ciencias de la comunicación, las ciencias cognitivas, la neurociencia, la informática y, por supuesto, las matemáticas.

Por todo lo anterior, se puede decir que estamos en un momento significativo para la didáctica de las matemáticas, donde la interdisciplinariedad y la búsqueda de relaciones e interconexiones entre las teorías existentes sugieren un posible camino para su futuro desarrollo. Y en este contexto, el espacio APC constituye un marco conceptual idóneo para establecer estas conexiones con las metodologías y modelos teóricos de la neurociencia cognitiva.

REFERENCIAS

[1] Aristóteles. (trans. 1985). *The Complete Works of Aristotle*. The revised Oxford translation. In J. Barnes (Ed.). New Jersey, United States: Princeton University Press.

[2] Arzarello, F. (2006). Semiosis as a multimodal process. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 9 (1).

[3] Arzarello, F., Bosch, M., Gascón, J. & Sabena, C. (2008). The ostensive dimension through the lenses of two didactic approaches. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 40, 179-188.

[4] Arzarello, F., Paola, D. Robutti, O., & Sabena, C. (2009). Gestures as semiotic resources in the mathematics classroom. Educational Studies in Mathematics, 70(2), 97–109.

[5] Arzarello, F., Sabena, C. (2014). Introduction to the Approach of Action, Production, and Communication (APC). In: Bikner-Ahsbahs, A., Prediger, S. (Eds.) *Networking of Theories as a Research Practice in Mathematics Education*. Advances in Mathematics Education. Springer, Cham.

[6] Barsalou, L. W. (2007). Grounded cognition. *Annual Review of Psychology*, 59(1), 617–645.

[7] Chiesa, A., Serretti, A., y Jakobsen, J. C. (2013). Mindfulness: top-down or bottom- up emotion regulation strategy? *Clinical Psychology Review,* 33(1), 82–96.

[8] Cunningham, W. A., y Zelazo, P. D. (2007). Attitudes and evaluations: a social cognitive neuroscience perspective. *Trends in Cognitive Sciences*, 11(3), 97–104.

[9] Demers, S., Miranda, I. & Radford, L., (2009). *Processus d'abstraction en mathématiques*. Imprimeur de la Reine pour l'Ontario et Université Laurentienne.

[10] Dubinsky, E., Weller, K., Mc Donald, M., Brown, A. (2005). Some historical issues and paradoxes regarding the concept of infinity: An APOS-based analysis. *Educational studies in Mathematics*, 58, 335-359.

[11] Evans, J. (2008). Dual-process accounts of reasoning, judgment, and social cognition. JSBT. *Annual Review of Psychology*, 255-278.

[12] Fischbein, E. (2001). Tacit models and infinity. *Educational studies in Mathematics*, 48, 309-329.

[13] Füstös, J., Gramann, K., Herbert, B. M., y Pollatos, O. (2012). On the embodiment of emotion regulation: interoceptive awareness facilitates reappraisal. *Social Cognitive and Affective Neuroscience*, 8(8), 911–917.

[14] Gallese, V. y Lakoff, G. (2005). The brain's concepts: the role of the sensory-motor system in conceptual knowledge. *Cognitive Neuropsychology*, 22 (3/4), 455-479.

[15] Gerofsky, S. (2015). Approaches to Embodied Learning in Mathematics. In L. D. English y D. Kirshne (Eds.) *Handbook of International Research in Mathematics Education*. Routledge Books, New York.

[16] Hampe, B. (Ed.). (2005). *From Perception to Meaning: Image-Schemas in Cognitive Linguistics*. Berlin-New York: Mouton de Gruyter.

[17] Hedblom, M. (2020). *Images Schemas and Concept Invention*. Springer Nature.

[18] Hume, D. (2007). *An Enquiry Concerning Human Understanding*. Oxford University Press. (Original work published 1748).

[19] Johnson, M. (1987). *The body in the mind. The bodily basis of meaning, imagination and reason*. Chicago and London: University of Chicago Press.

[20] Kant, I. (2003). *Critique of pure reason*. (N.K. Schmidt Trans.). New York, NY: St.Martin's Press (Original work published 1781).

[21] Kline, M. (1978) El fracaso de la Matemática moderna. Editora Siglo XXI, Madrid.

[22] Kuhn, W. (2007). An Image-Schematic Account of Spatial Categories. *Proceedings of the 8th international conference on Spatial information theory*.

[23] Lakoff, G. y Johnson, M. (1980). *Metaphors We Live By*. Chicago: University of Chicago Press.

[24] Lakoff, G., y Núñez, R. (2000). *Where Mathematics comes from*. Basic Books, New York, USA.

[25] Locke, J. (1997). An Essay Concerning Human Understanding. Penguin Publishing Group. (Original work published 1690).

[26] MacInnis, D. J. (2011). A framework for conceptual contributions in marketing. *Journal of Marketing*, 75, 136–154.

[27] Mandler, J. M. (1992). "How to build a baby: II. Conceptual primitives". *Psychological Review*, 99 (4): 587–604.

[28] Maturana, H.R., & Varela, F.J. (1992). *The tree of knowledge: The biological roots of human understanding* (rev. edition). Boston: Shambhala.

[29] Michalak, J., Burg, J., y Heidenreich, T. (2012). Don't forget your body: Mindfulness, embodiment, and the treatment of depression. *Mindfulness*, 3(3), 190–199.

[30] Nemirovsky, R. y Borba, M. (2003). Perceptuo-motor activity and imagination in mathematics learning. In N. Pateman, B. Dougherty, y J. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 1, 103–135. Manoa: University of Hawaii.

[31] Niedenthal, P. M., Barsalou, L. W., Winkielman, P., Krauth-Gruber, S., y Ric, F. (2005). Embodiment in attitudes, social perception, and emotion. *Personality and Social Psychology Review*, 9(3), 184–211.

[32] Piaget, J. (1998). *Psicología y Pedagogía*. Forense Universitária.

[33] Pierre J. L. (2008). *The Educated Brain*. Essays in Neuroeducation, Cambridge University Press, USA.

[34] Radford, L. (2005). Why do gestures matter? Gestures as semiotic means of Objectification. In Helen L. Chick, Jill L. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, University of Melbourne, Australia, 1, 143-145.

[35] Rivas, S. F., Saiz C., Ossa C. (2022). Metacognitive Strategies and Development of Critical Thinking in Higher Education. *Frontiers in Psychology*, 13, 913219.

[36] Rosch, E., Thompson, E., y Varela, F. J. (1991). *The embodied mind: cognitive science and human experience*. Cambridge: MIT Press.

[37] Schiralli, M., & Sinclair, N. (2003). A constructive response to 'where mathematics comes from. *Educational Studies in Mathematics*, 52, 79–91.

[38] Schwartzman, S. (1994). *The Words of Mathematics: An Etymological Dictionary of Mathematical Terms Used in English*. Mathematical Association of America.

[39] Sfard, A., McClain, K. (2002). Analyzing tools: Perspectives on the role of designed artifacts. In mathematics learning (special issue). *Journal of the Learning Sciences*, 11(2-3), 153–161.

[40] Siegel, D. J. (2010). *The mindful therapist: a clinician's guide to mindsight and neural integration*. New York: W.W. Norton y Co.

[41] Siegel, D. J. (2012). *Pocket guide to interpersonal neurobiology: an integrative handbook of the mind*. New York, NY: W.W. Norton y Company.

[42] Snyder, H. (2019). Literature review as a research methodology: An overview and guidelines. *Journal of Business Research*, 104, 333-339.

[43] Torraco, R. J. (2005). Writing integrative literature reviews: Guidelines and examples. *Human Resource Development Review*, 4, 356–367.

[44] Valdés-Sosa, P. A., Galan-Garcia, L., Bosch-Bayard, J., Bringas-Vega, M. L., Aubert-Vazquez, E., Rodriguez-Gil, I., Valdes-Sosa, M. J. (2021). The Cuban Human Brain Mapping Project, a young and middle age population-based EEG, MRI, and cognition dataset. *Scientific Data*, 8(1), 1-12.

[45] Vita, V. (1982). Il punto nella terminologia matematica greca. *Archive for the History of Exact Sciences*, 27, 101-114.

[46] Weinberger, A. B., y Green, A. E. (2022). Dynamic development of intuitions and explicit knowledge during implicit learning. *Cognition*, 222, 105008.

[47] Wilson, M. (2002). Six views of embodied cognition. *Psychonomic Bulletin & Review*, 9(4),625-636.

[48] Zamosc, G. (2017). The Political Significance of Plato's Allegory of the Cave. *Ideas y Valores*, 66 (165).

Autores

AUTORES

MARIA CÉLIA DA SILVA GONÇALVES (ORGANIZADORA)

Pós-doutorado em Educação pela Universidade Católica de Brasília (UCB). Estágio Pós-doutoral em Economic History Department of Law, Economics, Management and Quantitative Methods-DEMM da Università degli Studi Del Sannio - UNISANNIO-(Benevento, Italy). Visiting Professor da Università degli Studi Del Sannio - UNISANNIO. Pós-doutoranda em História pela Universidade de Évora em Portugal. Possui doutorado em Sociologia pela Universidade de Brasília (2010),mestrado em História pela Universidade de Brasília (2003), especialização em História pela Universidade Federal de Minas -UFMG (1998). Graduação em Geografia(2012) pela Faculdade Cidade de João Pinheiro (FCJP) Complementação em Supervisão Escolar(1993) pelas Faculdades Integradas de São Gonçalo, graduação em em História (1991) e em Estudos Sociais (1989) pela Faculdade do Noroeste de Minas. Atua como professora de História do Direito, Sociologia e Metodologia Científica Faculdade do Noroeste de Minas (FINOM). Coordenadora do Núcleo de Pesquisa e Iniciação Científica e Professora de Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) nos cursos de Pedagogia, Administração da Faculdade Cidade de João Pinheiro (FCJP). Avaliadora do Sistema Nacional de Avaliação da Educação Superior do Ministério da Educação - MEC/INEP. Presidente do Conselho Municipal do Patrimônio Cultural de João Pinheiro(MG). Atualmente é pesquisadora do Comunidade Escolar: Encontros e Diálogos Educativos - CEEDE, do Programa de Pós- Graduação em Educação da UCB .Membro da KINETÈS - Arte. Cultura. Ricerca. Impresa (UNISANNIO). Investigadora visitante no CIDEHUS - Centro Interdisciplinar de História, Culturas e Sociedades da Universidade de Évora em Portugal. Ocupante da cadeira de número 35 na Academia de Letras do Noroeste de Minas. Tem experiência na área de História e Sociologia, atuando principalmente nos seguintes temas: artes-folia- festas-cultura popular-performance- identidade e memória.

ADRIANA CAMEJO DA SILVA AROMA

Possui graduação em Pedagogia pela Universidade Bandeirante de São Paulo (1996), Mestrado em Distúrbios do Desenvolvimento pela Universidade Presbiteriana Mackenzie (2001) e Doutorado em Educação Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC/SP). É professora do Centro de Educação, Teologia e Filosofia (CEFT) da UPM, no curso de Pedagogia, nas modalidades presencial e EaD. Atua também como assessora na área de Matemática em escolas da rede pública e privada. Extensa experiência na área de Educação, e Formação de Professores, com ênfase em processos de ensino da matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental, atuando principalmente nos seguintes temas: ensino de matemática no ensino fundamental e formação de professores.

ANA RAQUEL SOARES NUNES

Pós-graduanda em Educação Especial e Inclusiva e Neuropiscopedagogia Clínica e Institucional pela FAVENI; Graduada em Matemática Licenciatura pela Universidade Estadual do Maranhão (UEMA); Professora da Rede Pública Municipal do Município de Joselândia-MA, atuando na Educação Básica

BRUNA DA ROSA MACHADO

Acadêmica do Curso de Matemática – Licenciatura da Universidade Federal do Pampa, campus Bagé.

CARLOS CARLOS ANDRÉ BOGÉA PEREIRA

Doutor em Educação pela Universidade São Francisco-SP (2014-2017), com Doutorado Sanduíche realizado na ESE de Lisboa e Universidade de Lisboa em Portugal (2015), Mestre em Matemática pela Universidade Estadual de Campinas (2011), Especialista em Gestão Escolar pelo IBMEC-RJ (2014), Especialista em Ensino da Matemática pela Universidade Estadual Vale do Acaraú (2004), Graduado e Licenciado em Matemática pela Universidade Federal do Maranhão (2002), Graduado em Pedagogia pela Universidade de Franca-SP. Desenvolve trabalhos na área de Formação de Professores, Gestão e Supervisão Escolar, Currículo, Avaliação, Planejamento, Políticas Educacionais, Legislação Educacional, Metodologia e Tecnologias no Ensino da Matemática, Didática e Filosofia no Ensino da Matemática, História da Matemática e História do Ensino da Matemática, Estatística e Probabilidade. Integrante da ANPED, e dos grupos de pesquisas HIFOPEM/USF-SP e

GPEM/UFMA. Professor Adjunto da Universidade Estadual do Maranhão (UEMA). Desenvolve atividades profissionais como Formador de Educadores das redes públicas e privadas. É professor da Graduação e Pós-graduação da Faculdade Laboro.

CLAUDIA LAUS ANGELO

Possuo graduação em Licenciatura em Matemática pela Universidade Federal de Santa Catarina (1992), mestrado e doutorado em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Unesp, campus de Rio Claro (1997 e 2012, respectivamente) e sou professora associada da Universidade Federal do Pampa, campus Bagé-RS. Coordeno, desde 2016, o Projeto de Extensão Pampa Circular - Danças Circulares no Pampa.

GISELE DE LIMA MUNHOZ

Licenciada do Curso de Matemática – Licenciatura da Universidade Federal do Pampa, campus Bagé e professora da Rede Municipal de Ensino de Bagé-RS

GRACIELA FAGUNDES JASKULSKI

Licenciada do Curso de Matemática – Licenciatura da Universidade Federal do Pampa, campus Bagé e professora da Rede Municipal de Ensino de Bagé-RS.

MÍRIAM DO ROCIO GUADAGNINI

Doutora em Educação Matemática pela Universidade Anhanguera de São Paulo (2018) e mestre em Educação Matemática pela Universidade Federal do Mato Grosso do Sul (2013). Graduada em Matemática pela Universidade Paranaense (1999) e em Ciências (1 grau) pela Faculdade Estadual, Ciências e Letras de Paranavaí (1998). Atualmente é professora adjunta da Universidade Federal de Goiás na Unidade CEPAE.

MYLENA SILVA SOUZA

Pós-graduanda em Educação Especial e Inclusiva e Neuropiscopedagogia Clínica e Institucional pela FAVENI; Graduada em Matemática Licenciatura pela Universidade Estadual do Maranhão (UEMA); Técnica em Petróleo e Gás pelo Instituto Federal do Maranhão – (IFMA); Professora de Matemática da Educação Básica do Maranhão.

PATRICIA AMARAL GUERRA FLOIS MOURA

Jornalista formada pela Fundação Universitária de Rádio e Televisão, e Pedagoga formada pela Universidade Presbiteriana Mackenzie, tem experiência tanto na área de radiojornalismo, como em educação, tendo atuado no projeto de formação docente Residência Pedagógica, em parceria com a CAPES.

TAMARA DÍAZ-CHANG

Doctora en Educación Matemática por el Departamento de Ciencias Exactas de la Universidad de Los Lagos y Candidata a Doctora en Matemática Aplicada por el Departamento de Matemáticas y Estadística de la Universidad de Montréal. Académica del Instituto de Ciencias Físicas y Matemáticas de la Universidad Austral de Chile.

VITÓRIA MESQUITA RODRIGUES

Acadêmica do Curso de Engenharia Química da Universidade Federal do Pampa, campus Bagé.

AUTORES

WALÉRIA DE JESUS BARBOSA SOARES

Doutora em Ensino de Ciências e Matemática pela Universidade Estadual de Campinas (2017), com Doutorado Sanduíche realizado na Faculdade de Psicologia e Educação da Universidade do Porto-Portugal (2015), Mestre em Matemática pela Universidade Estadual de Campinas (2009), Especialista em Psicologia e Coaching pela Faculdade Metropolitana-SP (2020), Especialista em Gestão Escolar pelo IBMEC-RJ (2014), Especialista em Cinema e Linguagem Audiovisual pela Universidade Gama Filho-SP (2014), Especialista em Ensino da Matemática pela Universidade Estadual Vale do Acaraú-CE (2004), Pedagoga pela Universidade de Franca-SP (2017), Graduada em Artes Visuais pela Universidade Federal do Maranhão (2013), Graduada em Matemática pela Universidade Federal do Maranhão (2001). Atualmente integra o Grupo de Pesquisa de História da Educação Matemática no Brasil-GHEMAT e o Grupo de Pesquisa em Educação Matemática - GPEM-UFMA. Professora Adjunta da Universidade Estadual do Maranhão. Professora do Mestrado Profmat- UEMA. Diretora-geral da Regional do Maranhão da Sociedade Brasileira de Educação Matemática - SBEM-MA(2021-2024).Educadora matemática, escritora, poeta, com premiações, comendas e participação em mais de 150 antologias de poesias, poemas, contos e crônicas. Autora dos livros: XIX - uma história, uma cidade e os primórdios da matemática escolar; Uma história sobre o ensino de juros; Por que não falar de amor(es)?. Organizadora de várias obras. Integra as seguintes academias: ALSPA-RJ; ALACAF-RJ; AILAP-AL; AIAP-PR; ALEART-MA e AHBLA-MG.

www.poisson.com.br
contato@poisson.com.br

@editorapoisson

https://www.facebook.com/editorapoisson