

CÁLCULO DE PROBABILIDADES

Nilo Antonio de Souza Sampaio
Antonio Henriques de Araujo Junior
Maria da Glória Diniz de Almeida
José Glenio Medeiros de Barros



Editora Poisson

Nilo Antônio de Souza Sampaio
Antonio Henriques de Araujo Junior
Maria da Glória Diniz de Almeida
José Glenio Medeiros de Barros

Cálculo de Probabilidades

1ª Edição

Belo Horizonte

Poisson

2019

Editor Chefe: Dr. Darly Fernando Andrade

Conselho Editorial

Dr. Antônio Artur de Souza – Universidade Federal de Minas Gerais

Ms. Davilson Eduardo Andrade

Msc. Fabiane dos Santos Toledo

Dr. José Eduardo Ferreira Lopes – Universidade Federal de Uberlândia

Dr. Otaviano Francisco Neves – Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais

Dr. Luiz Cláudio de Lima – Universidade FUMEC

Dr. Nelson Ferreira Filho – Faculdades Kennedy

Ms. Valdiney Alves de Oliveira – Universidade Federal de Uberlândia

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

S192

**SAMPAIO. Nilo Antônio de Souza; ARAUJO
JUNIOR, Antonio Henrique; ALMEIDA, Maria
da Glória Diniz de; BARROS, José Glenio
Medeiros – Cálculo de Probabilidades. Belo
Horizonte, Editora Poisson, 2019.
51p.**

Formato: PDF

ISBN: 978-85-7042-074-9

DOI: 10.5935/978-85-7042-074-9

Modo de acesso: World Wide Web

Inclui bibliografia

**1. Estatística 2. Métodos Quantitativos
I. Título**

CDD-519.5

O conteúdo dessa obra e seus dados em sua forma, correção e confiabilidade são de responsabilidade exclusiva dos seus respectivos autores.

www.poisson.com.br

contato@poisson.com.br



Nilo Antônio de Souza Sampaio

- Doutor em Engenharia Mecânica pela UNESP-FEG- 2011.
- Professor Adjunto de Probabilidade e Estatística UERJ-FAT, Professor Associação Educacional Dom Bosco (AEDB) e Professor Faculdade Sul Fluminense (FASF).
- Trabalha com Matemática Aplicada, Probabilidade e Estatística, trabalhando nas seguintes áreas: Pesquisa sobre Aplicações da Estatística e da Matemática em todas as Ciências e Planejamento de Experimentos.

Antonio Henriques de Araujo Junior

- Doutor em Engenharia Produção USP - 2004.
- Professor Adjunto UERJ-FAT.
- Trabalha com Gestão da Produtividade e da Qualidade e Gestão

Maria da Glória Diniz de Almeida

- Doutora em Engenharia Mecânica pela UNESP-FEG- 2017
- Professora Assistente UERJ-FAT.
- Trabalha com Análise de efeitos, Produtividade Industrial, Redução de Custos e Ergonomia

Antonio Henriques de Araujo Junior

- Doutor em Engenharia de Produção pela Universidade Federal do Rio de Janeiro – 1999.
- Professor Associado UERJ-FAT.
- Trabalha com Gestão de Manufatura, Controle Estatístico de Processo, Gestão da Qualidade, Produtividade e Administração da Produção.

Colaboradores

Além dos Autores temos a participação dos alunos abaixo, todos discentes da UERJ-FAT que muito contribuíram com a realização deste livro:

- João Carlos Ribeiro Fernandes, Mariana Gomes Andrade do Carmo, Vinicius Vieira Ribeiro, Ygor Henrique Kuwata Mendonça.

PREFÁCIO

Estamos colocando a disposição dos colegas professores este livro de Cálculo de Probabilidades. Tal qual os anteriores Estatística Descritiva e Estatística Inferencial ele tem o objetivo de ajudar os meus alunos no aprendizado desta importante disciplina. O tratamento teórico dos conceitos foi abordado de maneira bastante sucinta e os cálculos realizados passo a passo para ajudar os estudantes! Esperamos que seja do agrado dos Estudantes!

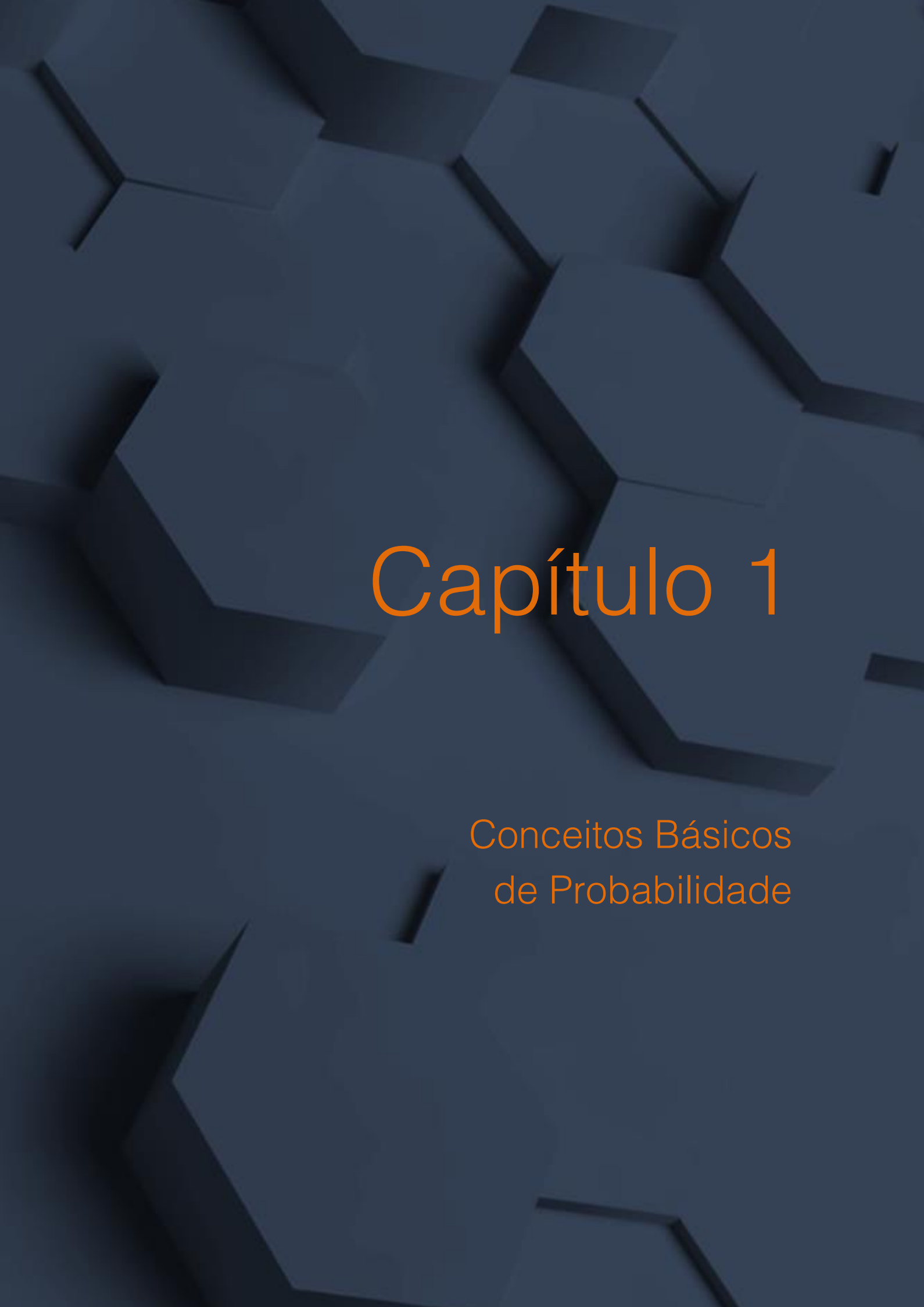
AGRADECIMENTOS

Gostaria de Agradecer primeiramente a Deus por me possibilitar realizar este trabalho, sem seu direcionamento e proteção eu jamais teria conseguido e também a minha família que me apóia em todos os momentos da minha vida. Gostaria ainda externar a minha gratidão a Professores Antonio Henrique de Araujo Júnio, Maria da Glória Diniz de Almeida e José Glenio Medeiros de Barros pelo trabalho e dedicação na realização deste trabalho.

Nilo Sampaio

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1: CONCEITOS BÁSICOS DE PROBABILIDADE	07
1.1 Histórico das Probabilidades	08
1.2 Conceitos Iniciais	09
1.3 Definição de Probabilidade	09
1.4 Casos Clássicos de Probabilidade	10
1.5 Exercícios de Aplicação	16
 CAPÍTULO 2: DISTRIBUIÇÕES DISCRETAS DE PROBABILIDADE	 17
2.1 Distribuição Binomial	18
2.2 Distribuição Polinomial	19
2.3 Distribuição de Poisson	20
2.4 Distribuição Geométrica	22
2.5 Distribuição de Pascal	24
2.6 Distribuição Hipergeométrica	26
2.7 Exercícios de Aplicação	27
 CAPÍTULO 3: DISTRIBUIÇÕES CONTÍNUAS DE PROBABILIDADE	 28
3.1 Distribuição Normal	29
3.2 Distribuição Exponencial	31
3.3 Distribuição Qui Quadrado	37
3.4 Exercícios de Aplicação	40
 REFERÊNCIAS	 49



Capítulo 1

Conceitos Básicos
de Probabilidade

1.1 HISTÓRICO DAS PROBABILIDADES

Os primeiros indícios de estudos envolvendo cálculo de probabilidades estão fundamentados em relatos históricos relacionados a jogos de azar na Idade Média, os quais eram praticados envolvendo apostas e os jogadores buscavam analisar as possibilidades a fim de traçar a melhor estratégia. Atribui-se à Gerônimo Cardano o desenvolvimento das primeiras teorias envolvendo o jogo de dados e iniciando a ideia de espaço amostral e de eventos pertencentes a este. Ele foi o primeiro a fazer observações do conceito probabilístico de um dado honesto ao escrever um argumento teórico que afirmava que, ao se jogar um dado ao acaso, a chance de se obter um, três ou cinco, era a mesma de se obter dois, quatro ou seis.

No século XVII através de correspondências trocadas entre Blaise Pascal e Pierre Fermat, ambos chegaram a uma solução correta de um problema de divisão das apostas, que foi um passo bastante significativo no domínio das probabilidades. O primeiro a dar um tratamento científico ao tema foi Christiaan Huygens. La Place fez a primeira tentativa de deduzir uma regra para definição da teoria clássica de probabilidade, como sendo a razão entre o número de casos favoráveis e o número de casos possíveis. Desenvolveu sua Teoria das Probabilidades em princípios consistentes e bem delineados. Suas contribuições são vastas e altamente relevantes na Física e na Estatística por exemplo. As contribuições de Bernoulli tiveram como foco os grandes números, enfatizando as combinações, permutações e a classificação Binomial os quais deram base para o estudo da estatística posteriormente. Gauss desenvolveu o método dos mínimos quadrados e a lei das distribuições das probabilidades e dividiu os méritos com Legendre que já havia publicado o método independente em 1806, e despertou interesse de Gauss na teoria dos erros de observação. A lei de Gauss na distribuição normal de erros, é hoje bastante utilizada para todos que trabalham com estatística.

No entanto, apenas no século XX que se desenvolveu uma tese matemática mais rigorosa, baseada em axiomas, definições e teoremas. Kolmogorov, matemático russo propôs três axiomas que deram uma definição mais consistente para o cálculo de probabilidades. O primeiro diz que a probabilidade de um evento, é um número real não negativo, o segundo diz que a probabilidade de que algum evento elementar em todo espaço amostral irá ocorrer é igual a um e o terceiro que diz respeito a eventos mutuamente exclusivos.

Atualmente os estudos voltados ao cálculo de probabilidades cálculos se espalharam para diversas áreas do conhecimento, como biologia (principalmente em genética), marketing e econometria. Isso devido a axiomas, teoremas e definições bem contundentes que estão principalmente aplicados à estatística indutiva, na acepção amostral, extensão dos resultados a população e previsão de futuros acontecimentos.

1.2 CONCEITOS INICIAIS

Define-se como experimento aleatório aquele que pode gerar diversos resultados a cada vez que acontece, por isso não temos como saber exatamente o que irá suceder, porém com base nos cálculos de probabilidade podemos prever quais resultados são mais prováveis de ocorrerem. Se lançarmos um dado ao acaso para observarmos a face que irá ficar voltada para cima, o resultado será imprevisível, pois existem seis possibilidades de resultado. Experimentos como esse que ocorrem nessas condições ou em circunstâncias parecidas, que podem gerar diversos resultados a cada vez, dar-se o nome de experimentos aleatórios.

Pegando agora como exemplo o lançamento de uma moeda ao acaso, também não é possível saber qual face ficará voltada para cima, mas podemos afirmar que ou será cara, ou será coroa, já que uma moeda possui apenas essas duas faces. A esse conjunto {cara; coroa} damos o nome de espaço amostral, o qual contém todas as possibilidades de ocorrência no experimento. Ao realizarmos um experimento aleatório, estamos interessados apenas em um subconjunto desse espaço amostral o qual é chamado de evento.

1.3 DEFINIÇÕES DE PROBABILIDADE:

Em um evento aleatório, as possibilidades são igualmente prováveis, assim temos que a probabilidade desse mesmo ocorrer é dada pela divisão entre o número de casos favoráveis e o número de casos possíveis. Sendo E um evento, $n(F)$ o seu número de elementos, ou seja o número de casos favoráveis, S o espaço amostral não vazio e $n(P)$ a quantidade de elementos do mesmo, ou seja o número de casos possíveis. Temos que a probabilidade de E ocorrer é igual a:

$$P = n(F)/n(P)$$

A probabilidade é um número entre zero e um, inclusive, o que significa que no mínimo não a nenhuma hipótese do evento acontecer e no máximo o evento sempre ocorrerá:

$$0 \leq P(E) \leq 1$$

1.3.1 PROBABILIDADE COMPLEMENTAR

A probabilidade complementar é aquela que não está ligada a ocorrência do evento que se deseja prever. Portanto a soma entre a probabilidade do evento que estamos interessados (P) e a probabilidade complementar (Q) deve ser igual a um.

$$P + Q = 1$$



Exemplo de Aplicação:

Um dado não viciado é lançado, qual a probabilidade da face voltada pra cima ser maior ou igual a dois? Qual a probabilidade complementar desse evento?

Dado (1, 2, 3, 4, 5, 6)

Número de casos favoráveis: 5

Número de casos possíveis: 6

Logo: $P = 5/6$

$5/6 + Q = 1$

$Q = 1 - 5/6$

$Q = 1/6$

1.4 CASOS CLÁSSICOS DE PROBABILIDADE

Os casos Clássicos de Probabilidade se referem às regras de probabilidade mais usadas e que resolvem a maioria dos problemas simples, que não envolvem grande complexidade e nem muitas variáveis probabilísticas. São eles:

1.4.1 UNIÃO DE PROBABILIDADES

A união de probabilidades de dois eventos ($A \cup B$) é possível, se os mesmos tiverem o mesmo espaço amostral, e isso pode ocorrer de duas maneiras.

Se a interseção entre os conjuntos A e B formam um conjunto vazio, ou seja, não possuem termos em comum podemos definir que:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Se a interseção entre os conjuntos A e B formam um conjunto não vazio, isso nos indica que eles possuem elementos em comum, sendo assim podemos definir que a união desses dois eventos pode ser definida como:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$



Exemplo de Aplicação:

No lançamento de um dado qual a probabilidade de o número obtido ser múltiplo de 2 ou de 3?

Dado: (1, 2, 3, 4, 5, 6)

Múltiplos de 2: A= {2, 4, 6}

Múltiplos de 3: B= {3, 6}

Assim, podemos concluir que $(A \cap B) \neq \emptyset$, então que:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A) = 3/6$$

$$P(B) = 2/6$$

$$P(A \cap B) = 1/6$$

Logo:

$$P(A \cup B) = 3/6 + 2/6 - 1/6$$

$$P(A \cup B) = 4/6$$

1.4.2 EVENTOS INDEPENDENTES E SUCESSIVOS

Dois ou mais eventos são independentes se a ocorrência de um deles não afeta a probabilidade de ocorrência do outro, e sucessivos pois ocorrem mais de uma vez. Como a ocorrência do evento A não atrapalha a probabilidade de outros eventos sucessivos ocorrerem, temos que:

$$P = P(A) * P(B) * P(C) * P(D) \dots$$



Exemplo de Aplicação:

Retirando duas cartas, ao acaso, com reposição de um baralho de 52 cartas, qual a probabilidade de a primeira ser de ouros e a segunda de espadas?

Como existe a reposição das cartas ao baralho, a ocorrência do primeiro evento, não altera a probabilidade de ocorrência do segundo, logo se trata de eventos independentes.

- Cartas de Ouros: 13

$$P(Ouros) = 13/52$$

- Cartas de Espadas: 13

$$P(Espadas) = 13/52$$

Então, $P = 13/52 * 13/52$

Simplificando temos:

$$P = 1/4 * 1/4$$

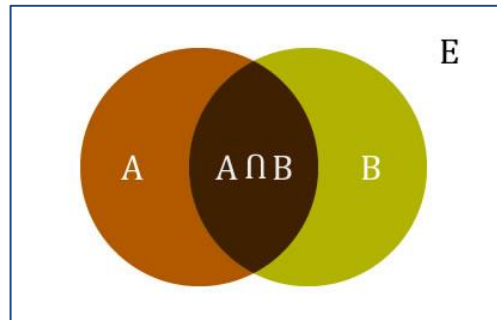
Logo:

$$P = 1/16$$

1.4.3 PROBABILIDADE CONDICIONAL

É a probabilidade de um evento 'A' ocorrer com base em um evento anterior 'B' ocorrido, em um espaço amostral finito e não vazio.

Figura-1: União de Probabilidades



Em um lançamento simultâneo de dois dados, por exemplo, deseja-se calcular a probabilidade de que a soma das faces voltadas para cima seja igual a 4 e que ambas sejam compostas por números ímpares.

Sendo assim a probabilidade de a soma desses números ser 4, esta condicionada a resultados ímpares nas duas faces, com isso os lançamentos que resultarem em um ou dois números pares, estão descartados e consequentemente há uma redução no espaço amostral

A parte do espaço amostral que nos interessa no exemplo é composta pelos nove pares:

$$\{1,1\}; \{1,3\}; \{1,5\}; \{3,1\}; \{3,3\}; \{3,5\}; \{5,1\}; \{5,3\} \text{ e } \{5,5\}$$

Em apenas dois desses pares $\{1,3\}$ e $\{3,1\}$ a soma resulta em 4, sendo assim a probabilidade desse evento ocorrer é de : $2/9$

■ Fórmula probabilidade condicional

Seja um espaço amostral não vazio e que contém os eventos A e B, a probabilidade de A ocorrer, dado que B já ocorreu é representada por $P(A/B)$ e pode ser calculada através da seguinte expressão :

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Onde, $P(A \cap B)$ é a probabilidade de o evento A interseção B ocorrer e $P(B)$ é a probabilidade do evento B já ocorrido.



Exemplo de Aplicação:

Em uma urna existem quatro bolas brancas numeradas de 1 a 4 e seis bolas pretas numeradas de 1 a 6. Retirando uma ao acaso observa-se que a mesma é preta. Qual a probabilidade de seu número ser par?

Na urna temos 10 bolas, 4 brancas e 6 pretas

-Bolas brancas: {1, 2, 3, 4} e Bolas pretas {1, 2, 3, 4, 5, 6}

Mas como a bola retirada foi preta, temos que a probabilidade de ela ser preta e par é igual a:

$$(A \cap B) = 3/10$$

E a probabilidade dela ser preta é de:

$$P(B) = 6/10$$

Utilizando a fórmula da probabilidade condicional temos que:

$$P(A/B) = \frac{3/10}{6/10} = 3/6 = 0,5(50\%)$$

1.4.4 PROBABILIDADE BINOMIAL

A probabilidade binomial é utilizada em eventos aleatórios repetidos, onde existem dois resultados possíveis sucesso ou fracasso. Representamos a probabilidade do sucesso como 'p' e o fracasso como 'q' e a soma dos dois deve ser igual a um.

Além disso, todas as tentativas devem possuir a mesma probabilidade para um resultado em particular, sendo assim as tentativas ou realizações de experimento são independentes. Ou seja, existe uma probabilidade p de sucesso constante em cada tentativa. O número de tentativas n é um valor fixo, um número inteiro e positivo assim como o número de sucessos x .

- Fórmula da probabilidade binomial

Seja x o número de **sucessos** em n **tentativas** independentes.

$$P(x) = \binom{n}{x} p^x (1 - p)^{n-x}$$

$$\binom{n}{x} = \frac{n!}{x! (n - x)!}$$



Exemplo de Aplicação:

Vamos supor que uma moeda não viciada seja lançada cinco vezes, qual a probabilidade de ocorrerem três caras?

Primeiramente temos que lembrar que em um lançamento de moedas existem apenas dois resultados possíveis (cara ou coroa), portanto a probabilidade de obter sucesso seria de 50% ou $\frac{1}{2}$.

Probabilidade de sucesso (p) = $\frac{1}{2}$

Fracasso (q) = ?

$$p + q = 1$$

Logo, $q = \frac{1}{2}$

A moeda foi lançada cinco vezes, portanto foram 5 tentativas

$$n = 5$$

E queremos calcular a probabilidade de ocorrer três caras, ou seja, 3 sucessos

$$r = 3$$

Utilizando a fórmula da probabilidade binomial, temos que

$$P = C_{5,3} \times p^3 \times q^{5-3}$$

Logo, $P = 10 \times (0,5)^3 \times (0,5)^2$

$$P = 0,31 \text{ ou } 31\%$$

1.5 EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO:

a) Em uma escola de idiomas com 2000 alunos, 500 alunos fazem o curso de inglês, 300 fazem o curso de espanhol e 200 cursam ambos os cursos. Selecionando-se um estudante do curso de inglês, qual a probabilidade dele também estar cursando o curso de espanhol?

Resposta: 2/5

b) Suponha que a probabilidade dos pais terem um filho(a) com cabelos loiros seja $\frac{1}{4}$. Se houverem 6 crianças na família, qual é a probabilidade de que metade delas terem cabelos loiros? **Resposta: 0,13.**

c) Numa empresa, de cada 100 peças vendidas, 30 são para o Rio de Janeiro, Na venda de 6 peças. Qual a probabilidade de que 4 sejam para o Rio de Janeiro? **Resposta: 5,953%**

d) Um grupo de 50 moças é classificado de acordo com a cor dos cabelos, e dos olhos de cada moça, segundo a tabela:

Cabelos	Olhos	
	Azuis	Castanhos
Loira	17	9
Morena	4	14
Ruiva	3	3

Resposta: 7/13

e) Um casal pretende ter filhos. Sabe-se que a cada mês a probabilidade da mulher engravidar é de 20%. Qual é a probabilidade dela vir a engravidar somente no quarto mês de tentativas? **Resposta: 10,24%**

f) Um dado não viciado é lançado 6 vezes, qual a probabilidade de ocorrer um 3 ou um 4 duas vezes ? **Resposta: 32,92%**

Capítulo 2

Distribuições Discretas
de Probabilidade

2. O QUE É A DISTRIBUIÇÃO DISCRETA?

Uma distribuição discreta descreve a probabilidade de ocorrência de cada valor de uma variável aleatória que tem valores contáveis, como uma lista de inteiros não negativos.

Uma variável discreta é aquela que pode ter valores no conjunto dos números naturais, ou em um subconjunto deles.

Deste modo, uma distribuição de probabilidade discreta é, por vezes, apresentado em forma de tabela.

2.1 DISTRIBUIÇÃO BINOMIAL

Aplica-se a distribuição binomial, mais frequentemente, para descrever controle estatístico de qualidade de uma população. O principal interesse está voltado a duas categorias: item defeituoso ou insatisfatório versus item bom ou satisfatório e sucesso e falha que tenham ocorrido em uma amostra de tamanho fixo.

A distribuição binomial é aplicada a eventos provenientes de uma série de experimentos aleatórios, que constituem o chamado Processo de Bernoulli.

O processo de Bernoulli é comumente utilizado em aplicações de engenharia envolvendo controle de qualidade.

Quando falamos sobre um processo de produção, cada novo produto criado é considerado como uma tentativa, e esta pode ser classificada em: com defeito ou sem defeito.

Esse processo não se limita a objetos; podendo ser usado em pesquisas de mercado, preferências dos consumidores por determinados produtos, preferências políticas em época de eleições, etc.

O modelo é dado pela seguinte função de probabilidade:

$$P(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

$$\binom{n}{x} = \frac{n!}{x! (n-x)!}$$

Onde:

n = número de tentativas

X = número de sucessos

P = probabilidade de sucesso



Exemplo de Aplicação:

Suponha que a probabilidade dos pais terem um filho(a) com cabelos loiros seja $\frac{1}{4}$. Se houverem 6 crianças na família, qual é a probabilidade de que metade delas terem cabelos loiros?

Aqui $n = 6$, $X = 3$, $p = 1/4$, e $q = 3/4$. Substituindo estes valores na fórmula binomial, obtemos:

$$P(3) = \frac{6!}{3!(6-3)!} \left(\frac{1}{4}\right)^3 \left(\frac{3}{4}\right)^{6-3} = \frac{6!}{3!3!} \left(\frac{1}{4}\right)^3 \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \left(\frac{1}{64}\right) \left(\frac{27}{64}\right) = 20 \left(\frac{27}{4096}\right) = \left(\frac{540}{4096}\right) \cong 0,13$$

2.2 DISTRIBUIÇÃO POLINOMIAL (OU MULTINOMIAL)

A Distribuição Multinomial faz parte do conjunto distribuições de probabilidades teóricas de variáveis aleatórias discretas, fazendo parte de um grupo ainda maior conhecido como distribuições teóricas de probabilidades e é uma generalização da Distribuição Binomial. Enquanto Distribuição Binomial se aplica apenas nos casos que envolvem mais que 2 tipos de resultados. A Distribuição Multinomial envolve mais que duas categorias. Um experimento multinomial é um experimento estatístico que tem as seguintes propriedades:

O experimento consiste de n tentativas repetidas.

Cada tentativa tem um número discreto resultados possíveis.

Em qualquer tentativa dada, a probabilidade de que um particular resultado ocorrerá é constante.

As tentativas são independentes; isto é, o resultado de uma tentativa não afeta o resultado das outras tentativas:

Diremos que um vetor aleatório $X = (X_1, \dots, X_k)$ segue uma Distribuição Multinomial com parâmetros n e $p = (p_1, \dots, p_k)$ se sua função de probabilidade for dada por:

$$\mathbb{P}(X_1 = n_1, \dots, X_k = n_k) = \frac{n!}{n_1! * \dots * n_k!} * p_1^{n_1} * p_2^{n_2} * \dots * p_k^{n_k}$$

Denotamos $X \sim \text{Multi}(n, p_1, \dots, p_k)$.

Em que:

x = número de sucessos em n tentativas;

p = probabilidade de sucesso;

q = probabilidade de fracasso;

k = número de sucessos na amostra.



Exemplo de Aplicação:

Os seguintes eventos podem ocorrer com um pacote enviado pelo correio: chegar em perfeito estado, chegar danificado ou perder-se pelo caminho. As probabilidades desses eventos são, respectivamente 0,7 , 0,2 e 0,1. Foram enviados recentemente 10 pacotes pelo correio. Qual a probabilidade de 6 chegarem corretamente ao destino, 2 serem perdidos e os outros 2 avariados?

Defina as seguintes variáveis aleatórias:

X_1 : número de pacotes que chegaram corretamente e sem danos;

X_2 : número de pacotes que chegaram avariados;

X_3 : número de pacotes que se perderam pelo caminho.

$$\text{Então } X_1 + X_2 + X_3 = n = 10 \quad \text{e} \quad p_1 + p_2 + p_3 = 0,7 + 0,2 + 0,1 = 1$$

Logo,

$$\mathbb{P}(X_1 = 6, X_2 = 2, X_3 = 2) = \frac{10!}{6! 2! 2!} * (0,7)^6 * (0,2)^2 * (0,1)^2 = 0,059$$

2.3 DISTRIBUIÇÃO DE POISSON:

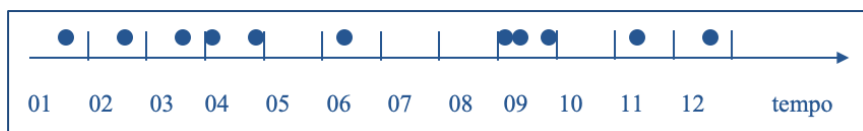
A distribuição de Poisson é uma das mais usadas para variáveis aleatórias discretas, que expressa a probabilidade de uma série de eventos ocorrer num certo período de tempo, considerando a ocorrência de um evento independentemente de quando ocorreu o último

Sua aplicação mais comum é na descrição de dados sobre vários tipos de fenômenos observáveis, por exemplo, número diário de telefonemas a uma central telefônica, número de

carros que passam por um cruzamento (ou uma cabine de pedágio) durante um certo período de tempo, acidentes por unidade de tempo, chegada de clientes a um supermercado por unidade de tempo, em análises de confiança em uma linha de produção (saber probabilidades de falhas). Sempre considerando o evento em função de um intervalo de tempo ou espaço.

2.3.1 PROCESSO DE POISSON

Imagine que se está interessado em saber o número de pessoas que entram num supermercado durante 12 minutos de um dia normal da semana. Cada pessoa que entra é considerada um evento. Obtém-se o seguinte resultado, tendo-se uma taxa média de $\lambda = 1$ (uma pessoa por minuto).



Todo o processo de Poisson tem as seguintes propriedades:

O número de eventos ocorrendo em um segmento de tempo ou espaço é independente do número de eventos ocorridos no segmento anterior; o processo de Poisson não tem memória;

A taxa média do processo, λ , deve permanecer constante durante o período de tempo e espaço considerados;

Quanto menor o segmento de tempo e espaço, menor a probabilidade de ocorrer mais de um evento naquele segmento. A probabilidade de ocorrência de 2 ou mais eventos se aproxima de zero, quando o tamanho do segmento se aproxima de zero.

2.3.2 PROBABILIDADES DE POISSON

A distribuição de Poisson é dada por:

$$p(x; \lambda, t) = P(X = x) = \frac{(\lambda t)^x e^{-\lambda t}}{x!} \text{ para } x = 0, 1, 2, \dots$$

em que os parâmetros λ e t são a taxa média do processo e o intervalo de tempo/espço, respectivamente.



Exemplo de Aplicação:

Um departamento de polícia recebe em média 5 solicitações por hora. Qual a probabilidade de receber 2 solicitações numa hora selecionada aleatoriamente?

Solução

X = número designado de sucessos = 2

λ = o número médio de sucessos num intervalo específico (uma hora) = 5

$$P(2) = \frac{5^2 e^{-5}}{2!} = 0,08422434 \text{ ou } 8,42\%$$

Observa-se que à medida que X aumenta, as probabilidades de Poisson tendem rapidamente a zero. Os resultados anteriores mudam completamente se os valores dos parâmetros λ e t forem alterados.

2.4 DISTRIBUIÇÃO GEOMÉTRICA

Nessa classe de problemas associados ao tempo de espera imagine o exemplo onde nós podemos lançar uma moeda, repetidamente, até que seja observado uma “cara”, ou ainda, podemos lançar uma bola de basquete na cesta repetidamente até acertarmos. A partir desse experimento temos interesse em calcular algumas probabilidades.

Dessa forma suponha que iremos conduzir repetidos experimentos de Bernoulli, observando as falhas e sucessos. Seja X o número de falhas antes do sucesso. Se $P(\text{Sucesso}) = p$ então X possui a seguinte PMF,

2.4.1 FUNÇÃO DE MASSA DE PROBABILIDADE:

$$p_X(x) = p(1-p)^x \quad x=0,1,2,\dots$$

Podemos dizer que X possui uma distribuição geométrica e escrever $X \sim \text{Geo}(p)$.

Fica claro que $pX(x) \geq 0$ e que podemos verificar que $\sum pX(x) = 1$.

$$\sum_{x=0}^{\infty} p(1-p)^x = p \sum_{x=0}^{\infty} (1-p)^x = p \frac{1}{1-(1-p)} = 1$$

resultado oriundo da série geométrica,

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x} = 1 \quad |x| < 1$$

2.4.2 VALOR ESPERADO E VARIÂNCIA:

$$E[X] = 1/p$$

$$V(X) = (1-p)/p^2$$

A variável aleatória geométrica é a única distribuição discreta com a propriedade de falta de memória que implica que se o experimento for iniciado em qualquer tentativa, não irá alterar a sua distribuição de probabilidades, ou seja a avaliação das probabilidades se iniciarem após algumas tentativas a distribuição não será afetada.



Exemplo de Aplicação:

Um pesquisador está realizando um experimentos químico independentes e sabe que a probabilidade de que cada experimento apresente uma reação positiva é 0,3. Qual é a probabilidade de que menos de 5 reações negativas ocorram antes da primeira positiva?

Para resolver este problema, considere X como sendo a variável aleatória que representa o número de reações negativas até a ocorrência da primeira positiva. Neste caso, temos que $X \sim \text{Geo}(0,3)$ e então

$$\mathbb{P}(X < 5) = \sum_{i=0}^4 \mathbb{P}(X = i) = 0,3 + 0,7 \cdot 0,3 + 0,7^2 \cdot 0,3 + 0,7^3 \cdot 0,3 + 0,7^4 \cdot 0,3 = 0,83193$$

2.5 DISTRIBUIÇÃO BINOMIAL NEGATIVA (OU PASCAL)

Podemos generalizar um problema e considerar o caso em que nós esperamos por mais de um único sucesso. Suponha que desejamos conduzir repetidos experimentos Bernoulli, observando os respectivos sucessos e falhas. Seja X a contagem do número de falhas antes de r sucessos, e $P(\text{Sucesso})=p$ então X possui a seguinte PMF,

2.5.1 VARIÁVEL ALEATÓRIA GENERALIZADA:

Seja X a contagem do número de falhas antes de r sucessos.

a) Função Massa de Probabilidade:

$$p_X(x) = \mathbb{P}(X = x) = \binom{r+x-1}{r-1} p^r (1-p)^x$$

Outra generalização da binomial negativa segue a mesma ideia da distribuição geométrica quanto à generalização da variável aleatória.

Seja Y a contagem do número de tentativas até que r sucessos ocorram.

b) Função Massa de Probabilidade:

$$p_Y(y) = \mathbb{P}(Y = y) = \binom{y-1}{r-1} p^r (1-p)^{y-r}$$

Podemos dizer que X possui uma distribuição binomial negativa e escrever $X \sim \text{Bin Neg}(r, p)$

Valor Esperado e variância:

$$\begin{aligned} E[X] &= 1/p \\ V(X) &= (1-p)/p^2 \end{aligned}$$



Exemplo de Aplicação:

Suponha que, para se ganhar um jogo de dados seja necessário obter **3** vezes a face voltada para cima do dado com o número de **1**. Sendo que o número de lançamentos devem ser **6** e devemos obter a face **1** voltada para cima pela terceira vez no sexto lançamento. Supondo que o dado seja honesto, qual será a probabilidade de vencermos o jogo.

De fato, como o dado é honesto temos que a probabilidade de sair o face 1 é $1/6$, portanto usando a formula da binomial negativa temos que:

$$\mathbb{P}(X = 6) = \binom{x-1}{k-1} p^k (1-p)^{x-k} = \binom{6-1}{3-1} \frac{1}{6}^3 \left(1 - \frac{1}{6}\right)^3 = \frac{1250}{46656} \approx 0,0267918$$

2.6 DISTRIBUIÇÃO HIPERGEOMÉTRICA

A distribuição hipergeométrica é uma das mais importantes distribuições de probabilidade para variáveis discretas usadas em amostragem estatística. O principal fator que diferencia esta distribuição e a distribuição binomial é que esta última requer que a amostragem seja feita com reposição. Por exemplo, em controle de qualidade de equipamentos eletrônicos, testes são feitos com a destruição da amostra, não podendo haver reposição.

As seguintes condições caracterizam a distribuição hipergeométrica:

O resultado de cada retirada (os elementos da população que compõem a amostra) pode ser classificado em uma de duas categorias mutuamente excludentes (por exemplo, aprovação ou reprovação, empregado ou desempregado);

A probabilidade de um sucesso muda a cada retirada, conforme cada retirada diminui a população (amostragem sem reposição a partir de uma população finita).

Uma variável aleatória X segue a distribuição hipergeométrica se a função massa de probabilidade for dada por

$$P(X = k) = \frac{\binom{K}{k} \binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

em que

N é o tamanho da população,
 K é o número de estados de sucessos na população,
 n é o número de retiradas,
 k é o número de sucessos observados,
 $\binom{a}{b}$ é um coeficiente binomial.



Exemplo de Aplicação:

Uma urna contém 10 bolas, das quais 6 são brancas e 4 pretas. Suponha que décimos retirar 5 bolas da urna qual a probabilidade de que das 5 bolas retiradas 3 sejam brancas?

Para este problema basta usarmos a distribuição hipergeométrica, com $M=6$, $K=3$, $N=10$ e $n=5$.

$$\mathbb{P}(X = 3) = \frac{\binom{6}{3}\binom{4}{2}}{\binom{10}{5}} = \frac{10}{21}$$

2.7 EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

a) Um inspetor de qualidade extrai uma amostra de 10 tubos aleatoriamente de uma carga muito grande de tubos que se sabe que contém 20% de tubos defeituosos. Qual é a probabilidade de que não mais do que 2 dos tubos extraídos sejam defeituosos? **Resposta: 0,6778 ou 67,8%.**

b) Um engenheiro de inspeção extrai uma amostra de 15 itens aleatoriamente de um processo de fabricação sabido produzir 85% de itens aceitáveis. Qual a probabilidade de que 10 dos itens extraídos sejam aceitáveis? **Resposta: 0,0449 ou 4,5%.**

c) Em uma indústria, 60% das peças torneadas são polidas. Se observarmos uma amostra de 10 peças torneadas de um lote qualquer, qual a probabilidade de encontrarmos ao menos 8 peças polidas? **Resposta: 0,167.**

d) Um processo de produção produz 10 itens defeituosos por hora. Encontre a probabilidade que 4 ou menos itens sejam defeituosos numa retirada aleatória por hora usando, usando a distribuição de Poisson. **Resposta: 0,01891664.**

e) Uma empresa fabrica um tipo de tomada que são embalados em lote de 25 unidades. Para aceitar o lote enviado por essa fábrica, o controle de qualidade da empresa tomou o seguinte procedimento: sorteia-se um lote e desse lote selecionam-se 8 tomadas para teste, sem reposição. Se for constatado, no máximo, duas tomadas defeituosas, aceita-se o lote fornecido pela fábrica. Se o lote sorteado tiver 7 peças defeituosas, qual a probabilidade de se aceitar o lote? **Resposta: 0,0010069.**

f) Uma caixa contendo 12 bolas, das quais 5 são vermelhas, 4 brancas e 3 azuis. Suponha que seja retirada 5 bolas ao acaso e com reposição. Qual a probabilidade de que sejam retiradas 2 bolas vermelhas, 2 brancas e 1 azul. **Resposta: 0,144675.**

g) Considere o experimento em que uma moeda viciada é lançada sucessivas vezes, até que ocorra a primeira cara. Seja X a variável aleatória que conta o número de coroas obtidos no experimento (ou seja, a quantidade de lançamentos anteriores a obtenção da primeira cara). Sabendo que a probabilidade de cara é de 0,4, qual é a probabilidade de $\mathbb{P}(2 \leq X < 4)$ e a probabilidade de

$\mathbb{P}(X > 1 | X \leq 2)$. **Resposta: 0,2304 e 0,18367.**

h) Suponha que em uma fábrica produz resistência para chuveiros, com uma taxa de defeitos de 2%. Qual a probabilidade de que em uma inspeção de 10 resistências se tenha 3 resistências defeituosas sendo que a terceira defeituosa seja exatamente a décima inspecionada. **Resposta: 0,00025.**

Capítulo 3

Distribuições Contínuas
de Probabilidade

3.1 DISTRIBUIÇÃO NORMAL

A distribuição Normal tem como características fundamentais a média e o desvio padrão. Para os interessados por Ciências Biológicas é a mais importante das distribuições contínuas pois muitas variáveis aleatórias de ocorrência natural ou de processos práticos obedecem esta distribuição. Abraham de Moivre, um matemático francês exilado na Inglaterra, publicou a função densidade de probabilidade da distribuição normal com média μ e variância σ^2 (ou, de forma equivalente, desvio padrão σ) em 1733:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \text{ em que } -\infty < x < \infty$$

É importante lembrar que os parâmetros populacionais μ e σ possuem os seguintes significados:

μ = média populacional: indica a posição central da distribuição

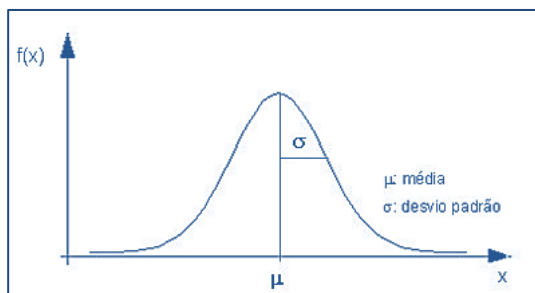
σ = desvio padrão populacional: refere-se à dispersão da distribuição

Se uma variável aleatória x tem distribuição normal com média μ e variância σ^2 , diz-se que

$$x \sim N(\mu, \sigma^2)$$

A figura a seguir mostra uma curva normal típica, com seus parâmetros descritos graficamente

Figura-2: Curva Normal



A curva normal tem forma de sino, ou seja, é unimodal e simétrica, e o seu valor de máxima frequência, a moda coincide com o valor da média e da mediana. A média é o centro da curva.

A distribuição de valores maiores que a média (μ) e a dos valores menores que a média (μ) é perfeitamente simétrica, ou seja, se passarmos uma linha exatamente pelo centro da curva teremos duas metades, sendo que cada uma delas é a imagem especular da outra.

As extremidades da curva se estendem de forma indefinida ao longo de sua base (o eixo das abcissas) sem jamais tocá-la. Portanto, o campo de variação da distribuição normal se estende de $-\infty$ a $+\infty$.

Assim sendo, a curva apresenta uma área central em torno da média, onde se localizam os pontos de maior frequência e também possui áreas menores, progressivamente mais próximas de ambas as extremidades, em que são encontrados valores muito baixos de x (à esquerda) ou escores muito altos (à direita), ambos presentes em baixas frequências.

Como em qualquer função de densidade de probabilidade a área sob a curva normal é 1, sendo a frequência total igual a 100%. Assim, a curva normal é uma distribuição que possibilita determinar probabilidades associadas a todos os pontos da linha de base.

Portanto, tomando-se quaisquer dois valores pode-se determinar a proporção de área sob a curva entre esses dois valores. E essa área é o próprio valor da frequência da característica que ela determina.

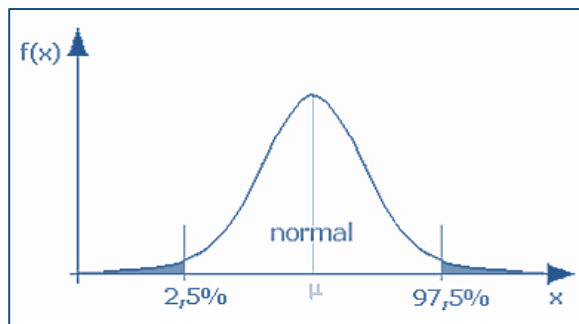
3.1.1 NORMAL E ANORMAL

A palavra normal tem um significado coloquial bastante indeterminado, mas tem um significado estatístico bem preciso.

O valor de uma variável tem ocorrência normal quando está entre 95% da área sob a curva em forma de sino, que tem a variável frequência no eixo dos Y , cujas extremidades ocupam 2,5% cada.

Ou seja, algum valor é considerado normal se está na em qualquer ponto entre 0,025 e 0,975 (2,5 e 97,5%) da área sob a curva.

Figura-3: Curva Normal



Portanto, há dois tipos de "anormal". Todos os valores encontrados na área que está entre 0 a 2,5% correspondem a um tipo. E todos os que estão no final da curva, ou seja, entre 97,5 e 100% se refiram ao outro tipo.

Uma pergunta pra pensar: É sempre ruim ser "anormal"?

É muito importante entender como a curva é afetada pelos valores numéricos de μ e σ .

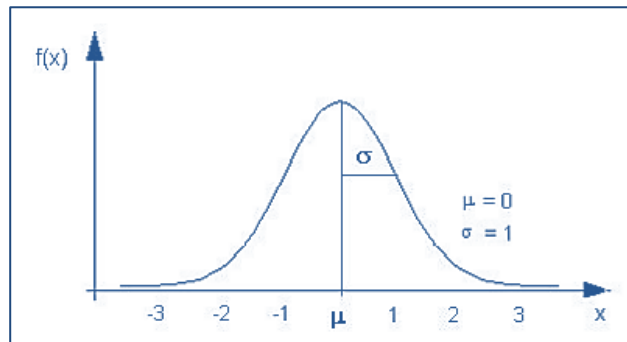
Assim, como se vê na figura seguinte, em que x corresponde ao número de desvios padrão e Y demonstra a frequência, quanto maior a média, mais à direita está a curva.

Note-se que, se diferentes amostras apresentarem o mesmo valor de média μ e diferentes valores de desvios padrão σ , a distribuição que tiver o maior desvio padrão se apresentará mais achatada (c), com maior dispersão em torno da média. Aquela que tiver o menor desvio padrão apresentará o maior valor de frequência e acentuada concentração de indivíduos em valores próximos à média (a).

3.2 DISTRIBUIÇÃO NORMAL PADRÃO

Todas as curvas normais representativas de distribuições de frequências podem ser transformadas em uma curva normal padrão, usando-se o desvio padrão (σ) como unidade de medida indicativa dos desvios dos valores da variável em estudo (x), em relação à média (μ). A Distribuição Normal Padrão é caracterizada pela média (μ) igual a zero e desvio padrão (σ) igual a 1.

Figura-4: Curva Normal



A figura anterior mostra também que o desvio-padrão controla o grau para o qual a distribuição se "espalha" para ambos os lados da curva. Percebe-se que aproximadamente toda a probabilidade está dentro de $\pm 3 \sigma$ a partir da média.

Se a variável x tem distribuição normal, pode ser transformada para uma forma padrão, denominada Z , (ou, como comumente se diz, pode ser padronizada) subtraindo-se sua média e dividindo-se pelo seu desvio padrão: $z = (x - \mu)/\sigma$

Quando se estima os coeficientes, usa-se a seguinte notação:

$$z = (x - x')/s$$

A equação da curva de z é:

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \text{ em que } -\infty < z < \infty$$

É importante lembrar que a área sob a curva pode ser entendida como uma medida de sua probabilidade e que a área sob a curva normal é igual a 1 (100%).

Assim, a variável x cuja distribuição é $N(\mu, \sigma^2)$ é transformada na forma padronizada z cuja distribuição é $N(0,1)$.

Essa é a distribuição normal padrão, que já está tabelada, pois os parâmetros da população (desvio padrão e média) são conhecidos. Então, se forem tomados dois valores específicos, pode-se determinar a proporção de área sob a curva entre esses dois valores. Para a

distribuição Normal, a proporção de valores caindo dentro de um, dois, ou três desvios padrão da média são:

entre	É igual a
$\mu \pm 1\sigma$	68,26%(1)
$\mu \pm 2\sigma$	95,44%(2)
$\mu \pm 3\sigma$	99,74%(3)

Z – Dados tabelados

Como se chegou a esses valores?

Para responder essa pergunta é necessário conhecer a distribuição de z, que já está tabelada.

Note-se que a Tabela de z determina a área a partir do número de desvios-padrão, os quais são lidos assim:

$\bar{a}, \bar{b}\bar{c}$	a=número inteiro lido na primeira coluna b=número decimal lido na primeira coluna c=número centesimal lido na primeira linha
---------------------------	---

O valor de z será encontrado na intersecção entre a coluna e a linha, sendo adimensional.

Verificando a tabela, percebe-se que para os valores negativos de z as áreas são obtidas por simetria, ou seja, existe o mesmo conjunto de valores, com sinal negativo, para o lado esquerdo da média, pois a tabela é especular.

Os valores de z permitem delimitar a área sob a curva, pois, como no eixo Y do gráfico está a frequência da variável, a área sob a curva tem o mesmo valor da probabilidade de ocorrência daquela característica.

**Exemplo de Aplicação:**

Qual é a área sob a curva normal contida entre $z = 0$ e $z = 1$?

Procura-se o valor 1 na primeira coluna da tabela e o valor da coluna 0,00. O valor da intersecção é de 0,3413, ou seja, 34,13%. Entretanto, lembrando que a curva normal é simétrica, sabe-se que a área sob a curva normal contida entre $z = 0$ e $z = -1$ também é 34,13%. Portanto, a área referente

a $-1 < z < 1$ vale a soma de ambas, ou seja, 68,26%.

Recordando que o valor central corresponde a μ , pode-se traçar o seguinte gráfico, em que se percebe que, excetuando-se os valores centrais, sobram apenas 15,87% para cada lado da curva.

Figura-5: Curva Normal

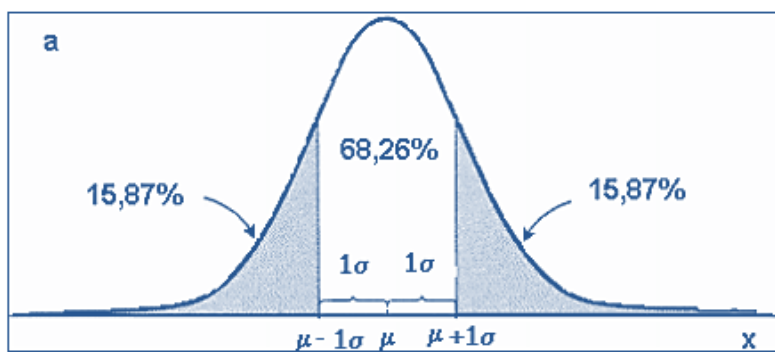


Tabela-1: Tabela da Distribuição Normal

z	0,0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,7	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,8	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

z	0,0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,4960	0,4920	0,4880	0,4840	0,4801	0,4761	0,4721	0,4681	0,4641
-0,1	0,4602	0,4562	0,4522	0,4483	0,4443	0,4404	0,4364	0,4325	0,4286	0,4247
-0,2	0,4207	0,4168	0,4129	0,4090	0,4052	0,4013	0,3974	0,3936	0,3897	0,3859
-0,3	0,3821	0,3783	0,3745	0,3707	0,3669	0,3632	0,3594	0,3557	0,3520	0,3483
-0,4	0,3446	0,3409	0,3372	0,3336	0,3300	0,3264	0,3228	0,3192	0,3156	0,3121
-0,5	0,3085	0,3050	0,3015	0,2981	0,2946	0,2912	0,2877	0,2843	0,2810	0,2776
-0,6	0,2743	0,2709	0,2676	0,2643	0,2611	0,2578	0,2546	0,2514	0,2483	0,2451
-0,7	0,2420	0,2389	0,2358	0,2327	0,2296	0,2266	0,2236	0,2206	0,2177	0,2148
-0,8	0,2119	0,2090	0,2061	0,2033	0,2005	0,1977	0,1949	0,1922	0,1894	0,1867
-0,9	0,1841	0,1814	0,1788	0,1762	0,1736	0,1711	0,1685	0,1660	0,1635	0,1611
-1,0	0,1587	0,1562	0,1539	0,1515	0,1492	0,1469	0,1446	0,1423	0,1401	0,1379
-1,1	0,1357	0,1335	0,1314	0,1292	0,1271	0,1251	0,1230	0,1210	0,1190	0,1170
-1,2	0,1151	0,1131	0,1112	0,1093	0,1075	0,1056	0,1038	0,1020	0,1003	0,0985
-1,3	0,0968	0,0951	0,0934	0,0918	0,0901	0,0885	0,0869	0,0853	0,0838	0,0823
-1,4	0,0808	0,0793	0,0778	0,0764	0,0749	0,0735	0,0721	0,0708	0,0694	0,0681
-1,5	0,0668	0,0655	0,0643	0,0630	0,0618	0,0606	0,0594	0,0582	0,0571	0,0559
-1,6	0,0548	0,0537	0,0526	0,0516	0,0505	0,0495	0,0485	0,0475	0,0465	0,0455
-1,7	0,0446	0,0436	0,0427	0,0418	0,0409	0,0401	0,0392	0,0384	0,0375	0,0367
-1,8	0,0359	0,0351	0,0344	0,0336	0,0329	0,0322	0,0314	0,0307	0,0301	0,0294
-1,9	0,0287	0,0281	0,0274	0,0268	0,0262	0,0256	0,0250	0,0244	0,0239	0,0233
-2,0	0,0228	0,0222	0,0217	0,0212	0,0207	0,0202	0,0197	0,0192	0,0188	0,0183
-2,1	0,0179	0,0174	0,0170	0,0166	0,0162	0,0158	0,0154	0,0150	0,0146	0,0143
-2,2	0,0139	0,0136	0,0132	0,0129	0,0125	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110
-2,3	0,0107	0,0104	0,0102	0,0099	0,0096	0,0094	0,0091	0,0089	0,0087	0,0084
-2,4	0,0082	0,0080	0,0078	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0068	0,0066	0,0064
-2,5	0,0062	0,0060	0,0059	0,0057	0,0055	0,0054	0,0052	0,0051	0,0049	0,0048
-2,6	0,0047	0,0045	0,0044	0,0043	0,0041	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036
-2,7	0,0035	0,0034	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026
-2,8	0,0026	0,0025	0,0024	0,0023	0,0023	0,0022	0,0021	0,0021	0,0020	0,0019
-2,9	0,0019	0,0018	0,0018	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014
-3,0	0,0013	0,0013	0,0013	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010
-3,1	0,0010	0,0009	0,0009	0,0009	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	0,0007	0,0007
-3,2	0,0007	0,0007	0,0006	0,0006	0,0006	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005
-3,3	0,0005	0,0005	0,0005	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0003
-3,4	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002
-3,5	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
-3,6	0,0002	0,0002	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001
-3,7	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001
-3,8	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001
-3,9	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

3.3 DISTRIBUIÇÃO EXPONENCIAL

A distribuição exponencial é uma distribuição utilizada na prática para modelar tempo de falha de objetos. Por exemplo, pode ser usada para modelar o tempo que demora até uma lâmpada falhar.

Ela possui um parâmetro, λ , que pode ser interpretado da seguinte forma: $1/\lambda$ é o tempo de vida médio do objeto

Definição: Variável Aleatório Seguindo Distribuição Exponencial

Uma variável aleatória contínua X assumindo valores não-negativos é dita seguir distribuição exponencial com parâmetro, $\lambda > 0$, se sua função de densidade é dada por

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

A distribuição Exponencial pode ser parametrizada de uma forma alternativa segundo a função densidade de probabilidade dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta} e^{-\frac{x}{\beta}} & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

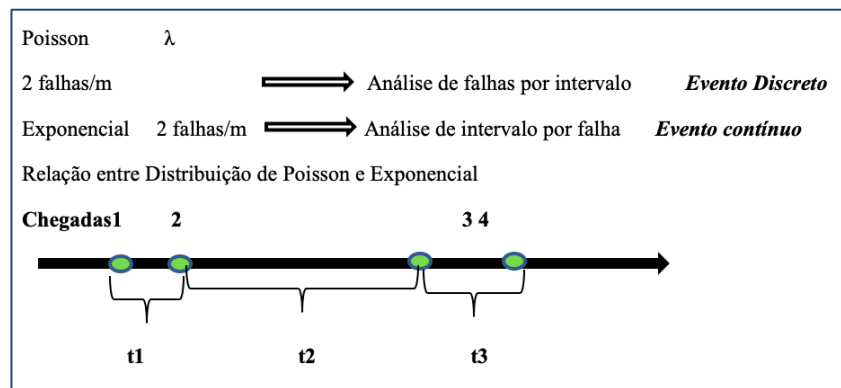
Pode ser aplicada nos casos onde queremos analisar o espaço ou intervalo de acontecimentos de um evento;

Na distribuição de Poisson – estimativa da quantidade de eventos num intervalo – distribuição de dados discreta.

Exemplo: Um fio de cobre apresenta uma taxa de 2 falhas por metro. Qual a probabilidade de apresentar, em um metro, 4 falhas?

A distribuição exponencial está ligada à de Poisson; ela analisa inversamente o experimento: um intervalo ou espaço para ocorrência de um evento.

No exemplo do fio, qual a probabilidade de ocorrer uma falha em 0,5 metros, se ele possui uma taxa de 2 falhas por metro?



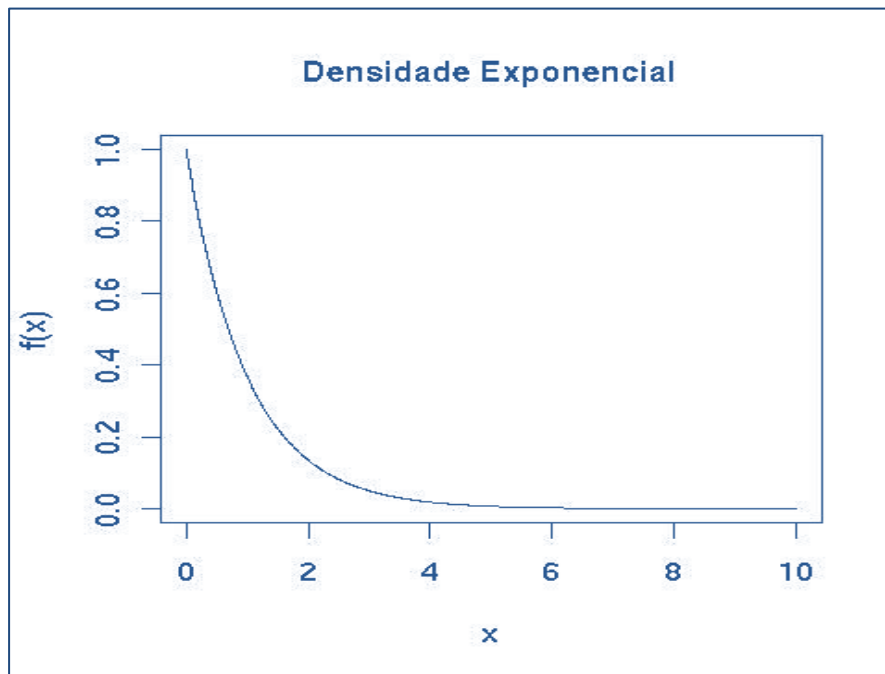
3.3.1 TEMPOS DE INTER CHEGADA

A Curva Densidade de Probabilidade

A distribuição exponencial depende somente da suposição de que o evento ocorra seguindo o processo de Poisson.

Curva da Distribuição Exponencial

Figura-6: Densidade Exponencial



3.3.2 MÉDIA E DESVIO PADRÃO

Se a variável aleatória X tiver uma distribuição exponencial, com parâmetro λ (ocorrência por intervalo), então:

$$E(x) = \frac{1}{\lambda} \sigma = \frac{1}{\lambda}$$



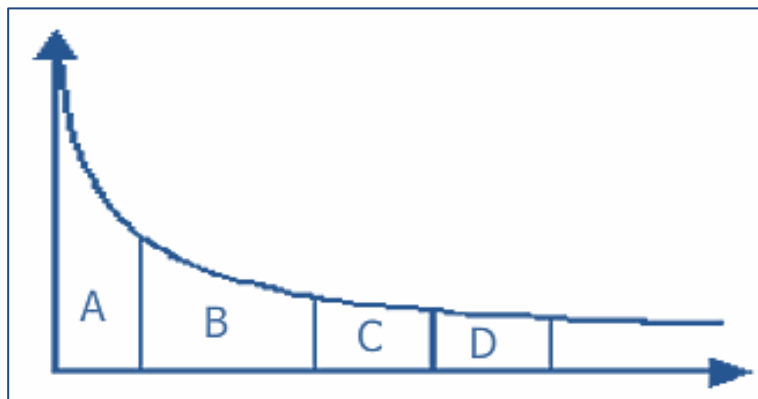
Exemplo de Aplicação:

Em uma grande rede corporativa de computadores, as conexões dos usuários ao sistema podem ser modeladas como um processo de Poisson, com média de 25 conexões por hora. Qual a probabilidade de não haver conexões em um intervalo de 6 minutos?

$$f(x) = \lambda \cdot e^{-\lambda x}$$

$$P(x > 0,1) = \int_{0,1}^{\infty} 25 \cdot e^{-25x} \cdot dx = -e^{-25\infty} - (-e^{-25 \cdot 0,1}) = -e^{-25 \cdot 0,1} = 0,082$$

Figura-7: Densidade Exponencial



3.3.3 USO DA DISTRIBUIÇÃO EXPONENCIAL

A distribuição exponencial é frequentemente usada em estudos de confiabilidade como sendo o modelo para o tempo até a falha de um equipamento – muito utilizado para componentes eletrônicos

Exemplo: O tempo de vida até a falha de um semicondutor pode ser modelado por uma variável aleatória exponencial com média 40.000h

3.4 DISTRIBUIÇÃO QUI QUADRADO

Qui Quadrado, simbolizado por X^2 é um teste de hipóteses que se destina a encontrar um valor da dispersão para duas variáveis nominais, avaliando a associação existente entre variáveis qualitativas. É um teste não paramétrico, ou seja, não depende dos parâmetros populacionais, como média e variância. O princípio básico deste método é comparar proporções, isto é, as possíveis divergências entre as frequências observadas e esperadas para um certo evento. Evidentemente, pode-se dizer que dois grupos se comportam de forma semelhante se as diferenças entre as frequências observadas e as esperadas em cada categoria forem muito pequenas, próximas a zero.

Portanto, o teste é utilizado para:

- Verificar se a frequência com que um determinado acontecimento observado em uma amostra se desvia significativamente ou não da frequência com que ele é esperado.
- Comparar a distribuição de diversos acontecimentos em diferentes amostras, a fim de avaliar se as proporções observadas destes eventos mostram ou não diferenças significativas ou se as amostras diferem significativamente quanto às proporções desses acontecimentos.

Condições necessárias para aplicar o teste as seguintes proposições precisam ser satisfeitas:

- Os grupos são independentes,
- Os itens de cada grupo são selecionados aleatoriamente,
- As observações devem ser frequências ou contagens,
- Cada observação pertence a uma e somente uma categoria e
- A amostra deve ser relativamente grande (pelo menos 5 observações em cada célula e, no caso de poucos grupos - pelo menos 10 - Exemplo: em tabelas 2x 2).

Como calcular Karl Pearson propôs a seguinte fórmula para medir as possíveis discrepâncias entre proporções observadas e esperadas:

$$X^2 = \sum [(o - e)^2 / e]$$

Em que

o = frequência observada para cada classe,

e = frequência esperada para aquela classe. Note-se que $(o - e)$ = desvio (d), portanto a fórmula também pode ser escrita como

$$X^2 = \frac{d^2}{e}$$

Percebe-se que as frequências observadas são obtidas diretamente dos dados das amostras, enquanto que as frequências esperadas são calculadas a partir destas. É importante notar que $(o - e)$ é a diferença entre a frequência observada e a esperada em uma classe. Quando as frequências observadas são muito próximas às esperadas, o valor de X^2 é pequeno. Mas, quando as divergências são grandes $(o - e)$ passa a ser também grande e, conseqüentemente, X^2 assume valores altos.

3.4.1 HIPÓTESES A SEREM TESTADAS

O pesquisador trabalha com duas hipóteses:

- Hipótese nula: As frequências observadas não são diferentes das frequências esperadas. Não existe diferença entre as frequências (contagens) dos grupos. Portanto, não há associação entre os grupos
- Hipótese alternativa: As frequências observadas são diferentes das frequências esperadas, portanto existe diferença entre as frequências. Portanto, há associação entre os grupos. Procedimento: é necessário obter duas estatísticas denominadas X^2 calculado e X^2 tabelado.

As frequências observadas são obtidas diretamente dos dados das amostras, enquanto que as frequências esperadas são calculadas a partir destas. Assim, o X^2 calculado é obtido a

partir dos dados experimentais, levando-se em consideração os valores observados e os esperados, tendo em vista a hipótese. Já o X^2 tabelado depende do número de graus de liberdade e do nível de significância adotado. A tomada de decisão é feita comparando-se os dois valores de X^2 :

Se X^2 calculado $>$ ou $= X^2$ tabelado: Rejeita-se H_0 .

Se X^2 calculado $< X^2$ tabelado: Aceita-se H_0 .

Quando se consulta a tabela de X^2 observa-se que é determinada uma probabilidade de ocorrência daquele acontecimento. Portanto, rejeita-se uma hipótese quando a máxima probabilidade de erro ao rejeitar aquela hipótese for baixa (alfa baixo). Ou, quando a probabilidade de os desvios terem ocorrido pelo simples acaso é baixa. O nível de significância (alfa) representa a máxima probabilidade de erro que se tem ao rejeitar uma hipótese. O número de graus de liberdade, nesse caso é assim calculado: G.L. = número de classes - 1 E, evidentemente, quanto maior for o valor do X^2 mais significativa é a relação entre a variável dependente e a variável independente.



Exemplo de Aplicação:

Se uma moeda não viciada for jogada 100 vezes, espera-se obter 50 caras e 50 coroas, já que a probabilidade de cair cara (p) é $= \frac{1}{2}$ e a de cair coroa (q) também é $= \frac{1}{2}$. Entretanto, na prática, é muito difícil obter valores observados, idênticos aos esperados, sendo comum encontrar valores que se desviam dos teóricos.

Supondo que uma moeda foi jogada 100 vezes e se obteve 60 caras e 40 coroas.

- a) Qual será o valor de X^2 ?
- b) Como se pode interpretar esse valor?

Solução:

As frequências esperadas em cada classe são calculadas por:

$$p \cdot N. \text{ Portanto: } E(\text{cara}) = \frac{1}{2} \cdot 100 \text{ e } E(\text{coroa}) = \frac{1}{2} \cdot 100$$

Assim, os valores esperados são: cara: 50 e coroa: 50 e os observados são: cara: 60 e coroa: 40

$$X^2 = [(60 - 50)^2/50] + [(40 - 50)^2/50]$$

a) Valor de $X^2 = 2 + 2 = 4$

O que significa esse número? Ou seja, como se analisa um teste de X^2 ?

Supondo que em vez de lançarmos 100 moedas uma única vez, tivéssemos feito inúmeros lançamentos de 100 moedas. Se calcularmos o X^2 a cada 100 lançamentos, e, depois, colocarmos todos os resultados em um gráfico.

Nota-se que os valores pequenos de X^2 ocorrem mais frequentemente que os grandes, pois se um experimento puder ser representado pelo modelo teórico proposto, pequenos desvios casuais entre proporções esperadas e observadas ocorrerão em maior número do que grandes desvios.

Tomando a área total sob a curva como 100%, sabe-se que o valor 3,841 delimita 5% dela. Este é o valor crítico de qui quadrado conhecido como X^2_c . Portanto, espera-se em experimentos semelhantes, que valores de X^2 e menores que 3,841 tenham 95% de probabilidade de ocorrência.

Sempre que o valor de X^2 for menor que 3,841 aceita-se a hipótese de igualdade estatística entre os números de observados e de esperados (H_0). Ou seja, admite-se que os desvios não são significativos.

b) Como se pode interpretar esse valor?

No exemplo dado, como o valor de Qui Quadrado obtido (4) para 2 classes foi maior que o esperado ao acaso (3,841), aceita-se a hipótese alternativa e admite-se que a moeda seja viciada.

3.4.2 COMO USAR A TABELA

Entretanto, é importante notar que esse raciocínio e decisão só são válidos quando há 2 classes possíveis de eventos. (Como no exemplo dado, em que o lançamento da moeda pode resultar em 2 acontecimentos: cara ou coroa).

Mas, se tivéssemos lançado um dado seriam 6 classes possíveis. Como faríamos, então? Deve-se consultar uma tabela de χ^2 e lembrar que, nesse caso:

$$GL = \text{número de classes} - 1.$$

A tabela de Qui Quadrado mostra o número de Graus de liberdade nas linhas e o valor da Probabilidade nas colunas.

Na coluna referente a 5% de probabilidade encontra-se o valor crítico de qui quadrado (χ^2_c), com o qual deve ser comparado o valor calculado de χ^2 .

Tabela-2: Tabela Qui Quadrado

						χ^2_c			
GL \ P	0,99	0,95	0,90	0,80	...	0,05	0,02	0,01	0,001
1	0,0002	0,004	0,016	0,064	...	3,841	5,412	6,635	10,827
2	0,020	0,103	0,211	0,446	...	5,991	7,824	9,210	13,815
3	0,115	0,352	0,584	1,005	...	7,815	9,837	11,345	16,266
4	0,297	0,711	1,064	1,649	...	9,488	11,668	13,277	18,467
5	0,554	1,145	1,610	2,343	...	11,070	13,388	15,080	20,515
...									
Aceita-se a hipótese de igualdade estatística entre os números de observados e de esperados (H_0). Os desvios <i>não</i> são significativos.						Rejeita-se H_0 e aceita-se H_1 . Os números de obs e esp são estatisticamente diferentes. Os desvios <i>são</i> significativos.			



Exemplo de Aplicação:

Se um dado não viciado for jogado 6 vezes, espera-se obter 1 vez cada face (1, 2, 3, 4, 5 e 6) já que a probabilidade de cair qualquer face é 1/6. Supondo que um dado foi jogado 186 vezes e se obteve:

Face 1	Face 2	Face 3	Face 4	Face 5	Face 6
34	29	30	32	28	33

- a. Qual será o valor de χ^2 ?
 b. Como se pode interpretar esse valor?

Solução

As frequências esperadas em cada classe são calculadas por: $p.N$. Portanto:

$$E(\text{face 1}) = E(\text{face 2}) = E(\text{face 3}) = E(\text{face 4}) = E(\text{face 5}) = E(\text{face 6}) = p.N = 1 / 6 . 186 = 31$$

- a) Qual será o valor de χ^2 ?

Assim, os valores parciais são somados: e chega-se ao valor de χ^2 :

Observado	34	29	30	32	28	33
Esperado	31	31	31	31	31	31
χ^2	0,2903	0,1290	0,0322	0,0322	0,2903	0,1290

$$\chi^2 = (0,2903 + 0,1290 + 0,0322 + 0,0322 + 0,2903 + 0,1290) = 0,903$$

- b) Como se pode interpretar esse valor?

Lembrando que $GL = \text{número de classes} - 1$, como há 6 classes, $GL = 5$. Verificando-se a tabela de χ^2 na linha em $GL = 5$ encontra-se χ^2 c igual a 11,070. Como o valor de Qui Quadrado obtido (0,903) foi menor que o esperado ao acaso (11,070) admite-se que o dado seja honesto.

3.5 EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

Distribuição Normal

- a) Em uma população de indivíduos adultos de sexo masculino, cuja estatura média é 1,70 m e desvio padrão é 0,08 m, qual é o intervalo de alturas em que 95% da população está compreendido?
- b) Na mesma população, qual a probabilidade de um indivíduo apresentar estatura entre 1,60 e 1,82 m?

- c) Qual a probabilidade de se encontrar 1 indivíduo com estatura menor que 1,58 m?
- d) Sabendo-se que o índice de massa corpórea em uma população de pacientes com diabetes mellitus obedece uma distribuição normal e tem média = 27 kg/cm² e desvio-padrão = 3 kg/cm², qual a probabilidade de um indivíduo sorteado nessa população apresentar um índice de massa corpórea entre 26 kg/cm² e μ ?
- e) Em mulheres, a quantidade de hemoglobina por 100 ml de sangue é uma variável aleatória com distribuição normal de média = 16g e desvio padrão $s = 1$ g. Calcular a probabilidade de uma mulher apresentar 16 a 18 g por 100 ml de hemoglobina no sangue.

Distribuição Exponencial

- a) O tempo de vida (em horas) de um transistor é uma variável aleatória T com distribuição exponencial. O tempo médio de vida do transistor é de 500 horas.
- 1) calcule a probabilidade de o transistor durar mais do que 500 horas. (0,3679)
- 2) calcule a probabilidade de o transistor durar entre 300 e 1000 horas. (0,4135)
- 3) sabendo-se que o transistor já durou 550 horas, calcule a probabilidade de ele durar mais 500 Horas.
- b) O setor de manutenção de uma empresa fez um levantamento das falhas de um importante Equipamento, constatando que há, em média, 0,75 falha por ano e que o tempo entre falhas segue Uma distribuição exponencial. Qual é a probabilidade de o equipamento não falhar no próximo ano?
- c) A vida útil de certo componente eletrônico é, em média, 10.000 horas e apresenta distribuição Exponencial. Após quantas horas se espera que 25% dos componentes tenham falhado?
- d) A vida de um certo componente eletrônico é, em média, 10.000 horas e apresenta distribuição exponencial. Qual é a percentagem esperada de componentes que apresentarão falhas em menos de 10.000 horas?

Distribuição Qui quadrado

a) Desejando-se verificar se duas vacinas contra brucelose (uma padrão e uma nova) são igualmente eficazes, pesquisadores realizaram o seguinte experimento: um grupo de 14 bezerras tomou a vacina padrão e outro grupo de 16 bezerras tomou a vacina nova. Considerando que os dois grupos estavam igualmente expostos ao risco de contrair a doença, após algum tempo, verificou-se quantos animais, em cada grupo, havia contraído a doença:

Vacina	Brucelose		Total
	Sim	Não	
Padrão	10	4	14
Nova	5	11	16
Total	15	15	30

Existe diferença estatisticamente significativa entre as proporções de bezerras que contraíram brucelose usando a nova vacina e a vacina padrão?

b) As reações adversas de uma nova vacina que foi desenvolvida para gripe estão sendo estudadas. A tabela resume os resultados obtidos.

Tratamento	Reação Adversa	
	Não	Sim
Vacina	83	17
Placebo	87	13

Deseja-se testar a hipótese de homogeneidade na ocorrência de reações adversas entre os pacientes tratados com placebo e vacina. Qual é o valor da contribuição da primeira célula da tabela para a estatística do teste Qui-Quadrado de homogeneidade?

c) Observe a tabela de contingências a seguir:

	Atributo B presente	Atributo B ausente
Atributo A presente	220	280
Atributo A ausente	280	220

O valor da estatística qui-quadrado usual para se testar a independência entre os atributos A e B é igual a:

- a) 7,6
- b) 10,2
- c) 14,4
- d) 20,6
- e) 22,8

d) Se uma moeda não viciada for jogada 100 vezes espera-se obter 50 caras e 50 coroas, já que a probabilidade de cair cara(p) é $=1/2$. Entretanto, na prática, é muito difícil obter valores observados, idênticos aos esperados, sendo comum encontrar valores que se desviam dos teóricos.

Supondo que uma moeda foi jogada 100 vezes e se obteve 60 caras e 40 coroas.

1) Qual será o valor de X^2 ?

2) Como se pode interpretar esse valor?

e) Suponha que as proporções dos quatro tipos de sangue de certa raça sejam iguais a 16%, 48%, 20% e 16%. Para outra raça, em uma amostra aleatoriamente selecionada, as frequências observadas de cada tipo sanguíneo foram, respectivamente, 180, 360, 130 e 100. Utilizando um procedimento estatístico, com 5% de significância, verifique se esta raça possui a mesma distribuição, quanto aos tipos de sangue.

Especifique as hipóteses estatísticas e conclua utilizando o nível descritivo.

REFERÊNCIAS

- [1] BERTSEKAS, Dimitri P.; SHREVE, Steven E. Stochastic optimal control: The discrete time case. New York: Academic Press, 1978.
- [2] BERTSEKAS, Dimitri P.; SHREVE, Steven E. Stochastic optimal control: The discrete time case. New York: Academic Press, 1978.
- [3] BLACKWELL, David et al. An analog of the minimax theorem for vector payoffs. Pacific Journal of Mathematics, v. 6, n. 1, p. 1-8, 1956.
- [4] CHOQUET, Gustave. Theory of capacities. In: Annales de l'institut Fourier. 1954. p. 131-295.
- [5] DELLACHERIE, Claude; MEYER, Paul-Andre. Probabilite et Potentiel. Hermann, Paris, 1975. English transl., North-Holland, 1978.
- [6] DEVORE, J. L. Probabilidade e Estatística para Engenharia e Ciências. Ed.2 Thomson, 2006.
- [7] DE LA RUE, Thierry. Espaces de Lebesgue. In: Séminaire de Probabilités XXVII. Springer Berlin Heidelberg, 1993. p. 15-21.
- [8] DOOB, J.L.- Measure Theory. Springer-Verlag, N. York & Berlin, 1991.
- [9] FELLER, W. - An Introduction to Probability Theory and Its Applications, Volume II. Wiley, N. York, 1966.
- [10] GREENE, William H. (2003). Econometric Analysis (5th ed.). Prentice Hall.
- [11] HALMOS, Paul R.; VON NEUMANN, John. Operator methods in classical mechanics, II. Annals of Mathematics, p. 332-350, 1942.
- [12] HELLAND, I. Central limit theorems for martingales with discrete or continuous time. Scandinavian Journal of Statistics, p. 79-94, 1982.
- [13] JAMES, B. Probabilidade: um curso em nível intermediário. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 1981. v. 12.
- [14] JOHAN Ludwig William Valdemar Jensen. Sur les fonctions convexe set les inégalités entre les valeurs moyennes. Acta Mathematic, 30(1):175-193, 1906.
- [15] LEÃO JR, D.; FRAGOSO, M. D.; RUFFINO, P. R. C. Characterizations of Radon spaces. Statistics & probability letters, v. 42, n. 4, p. 409-413, 1999.
- [16] MARCZEWSKI, E. Ensembles independant et mesures non separables. CR Acad. Sci Paris, v. 207, p. 768-770, 1938.
- [17] NEVEU, Jacques. Mathematical foundations of the calculus of probability. San Francisco: Holden-day, 1965.
- [18] ROGERS, Claude Ambrose. Analytic sets. Academic Pr, 1980.

- [19] SIDDIQUI, M. M. Statistical inference for Rayleigh distributions. Journal of Research of the National Bureau of Standards, Sec. D, v. 68, 1964.
- [20] SYLVIA Frühwirth-Schnatter. Finite Mixture and Markov Switching Models. Springer Science & Business Media, 2006.
- [21] TSAGRIS, Michail; BENEKI, Christina; HASSANI, Hossein. On the folded normal distribution. Mathematics, v. 2, n. 1, p. 12-28, 2014.
- [22] TORTRAT, A. Sur le support des lois indéfiniment divisibles dans les espaces vectoriels localement convexes. In: Annales de l'Institut de Probabilité et statistiques. 1977. p. 27-42.
- [23] VOLKSVAGEN AG. VW 101 31 - Process Capability Investigation for Measurable Characteristics. 2005.

SITES VISITADOS

<https://portogente.com.br/>

<http://www.ebah.com.br/>

<https://www.inf.ufsc.br/>

<http://www.portalaction.com.br/>

<http://www.bertolo.pro.br/>

<https://www.passeidireto.com/>

<http://www.matematicadidatica.com.br/>

http://www.ime.usp.br/~hbolfar/aula_2013/Aula63

Agência Brasileira do ISBN

ISBN 978-85-7042-074-9



9 788570 420749